

Composition de Mathématiques

Le 18 décembre 2019 – De 13 heures à 17 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation et la rédaction comptent pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

**Les calculatrices sont interdites.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**

❖ I – Problème ❖

Dans ce sujet, n est un entier supérieur à 2 et on s'intéresse, sur divers exemples, à la réduction de matrices du type

$$\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, c et d sont quatre réels non tous nuls.

On rappelle d'une part que : si A et B sont deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$ et que

$$\forall T \in \mathbb{R}[X], \quad T(A) = P^{-1}T(B)P.$$

On rappelle d'autre part que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix} = \det A \times \det C$$

quelles que soient les matrices A, B et C dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A. Préliminaire

On considère ici une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et on note u , l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M .

L'objectif de cette partie est de démontrer que M est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur de M scindé à racines simples (ce qui constitue un résultat bien connu du cours).

1. On suppose qu'un vecteur $x \in E$ vérifie

$$u(x) = \lambda \cdot x$$

pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\forall T \in \mathbb{R}[X], \quad T(u)(x) = T(\lambda) \cdot x.$$

2. On suppose que u est diagonalisable et on note

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$$

les valeurs propres (distinctes) de u . Démontrer que le polynôme

$$P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_p)$$

est un polynôme annulateur de u .

3. Réciproquement, on suppose que

$$Q = (X - \mu_1)(X - \mu_2) \cdots (X - \mu_r)$$

est un polynôme à racines simples (c'est-à-dire que les réels μ_k sont deux à deux distincts), annulateur de u . Démontrer que le spectre de u est contenu dans l'ensemble

$$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$$

et, en appliquant le Théorème de décomposition des noyaux, et que u est diagonalisable sur \mathbb{R} .

Partie B. Un premier exemple

4. On suppose que

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que V est diagonalisable sur \mathbb{R} et donner une matrice inversible

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

et une matrice diagonale D telles que

$$V = PDP^{-1}.$$

NB : On donnera P^{-1} sans détailler le calcul de cette matrice.

5. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On considère la matrice par blocs

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$$

(où α, β, γ et δ sont les coefficients de la matrice P définie à la question précédente).

Démontrer que la matrice Q est inversible, expliciter la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice

$$W(A) = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

6. On suppose dans cette question que la matrice A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: il existe donc une matrice inversible $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit matriciel par blocs :

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix} \times B \times \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix}.$$

Que peut-on en déduire pour la matrice $W(A)$?

7. On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent : on suppose donc que la matrice $W(A)$ est diagonalisable.

7.a. Soit $T \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme annulateur de $W(A)$. Calculer $T(A)$.

7.b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la matrice $W(A)$ soit diagonalisable.

Partie C. Un second exemple

8. Démontrer que la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

est trigonalisable sur \mathbb{R} et donner une matrice inversible P telle que

$$E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

9. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

est semblable à la matrice

$$F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$

10. On suppose que la matrice F est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

10.a. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme annulateur de F , scindé à racines simples. Démontrer que

$$\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0_n & U(A) \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

est la matrice nulle.

10.b. Démontrer que les polynômes U et U' sont premiers entre eux. En déduire que la matrice $U'(A)$ est inversible.

10.c. Vérifier que le polynôme minimal de A est X .

11. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable.

12. Exprimer le polynôme caractéristique de F en fonction de celui de A . En déduire que F est trigonalisable dans $\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, A est trigonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

13. Donner un exemple de matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

ne soit pas trigonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

Partie D. Applications

14. Soit u , l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 représenté dans la base canonique

$$\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer deux plans vectoriels stables par u .

☞ On pourra s'inspirer de 5.

15. En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible Q telles que

$$M = QDQ^{-1}.$$

16. Utiliser la question précédente pour résoudre le système différentiel suivant.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 4x_2(t) + 2x_4(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) + 4x_3(t) \\ x_4'(t) = 2x_2(t) + 4x_4(t) \end{cases}$$

NB : On ne portera pas les détails du calcul sur la copie.

❖ **II – Problème** ❖

Partie A. Définitions

Dans ce problème, une matrice

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

est dite **stochastique** lorsque ses coefficients sont strictement positifs :

$$\forall 1 \leq i, j \leq p, \quad a_{i,j} > 0$$

et que, sur chaque ligne, la somme des coefficients est égale à 1 :

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad \sum_{j=1}^p a_{i,j} = 1.$$

Un vecteur ligne

$$\mu = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_p) \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$$

est une **loi de probabilité** lorsque les coefficients de μ sont tous positifs :

$$\forall 1 \leq j \leq p, \quad \mu_j \geq 0$$

et que la somme de ses coefficients est égale à 1 :

$$\sum_{j=1}^p \mu_j = 1.$$

Une loi de probabilité μ est une **loi de probabilité invariante** de la matrice stochastique $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ lorsque

$$\mu \cdot A = \mu.$$

On **admet** que toute matrice stochastique possède une, et une seule, loi de probabilité invariante (*Théorème de Perron-Frobenius*).

1. Dans cette question, on considère la matrice stochastique

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(On ne demande pas de vérifier que A est bien une matrice stochastique.)

Vérifier que la matrice A possède une, et une seule, loi de probabilité invariante. On explicitera cette loi de probabilité.

Partie B. Algorithme d'approximation

Pour tout vecteur ligne

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_p) \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R}),$$

on pose

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j|.$$

2. On considère une matrice stochastique $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ et une loi de probabilité

$$\mu_0 = (m_{0,1} \quad m_{0,2} \quad \dots \quad m_{0,p}) \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R}).$$

On définit alors une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs lignes

$$\mu_n = (m_{n,1} \quad m_{n,2} \quad \dots \quad m_{n,p}) \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$$

au moyen de la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_{n+1} = \mu_n \cdot A$$

2.a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur ligne μ_n est une loi de probabilité.

2.b. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, les coefficients du vecteur ligne μ_n sont tous strictement positifs.

2.c. Démontrer qu'il existe réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1, \forall 1 \leq j \leq p, \quad m_{n,j} \geq \alpha > 0.$$

3. On **admet** que, quel que soit la loi de probabilité μ_0 choisie, pour tout $1 \leq j \leq p$, la suite $(m_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel m_j .

3.a. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n - \mu_\infty\|_\infty = 0.$$

3.b. Démontrer que les réels m_j sont tous strictement positifs.

3.c. Démontrer que le vecteur ligne

$$\mu_\infty = (m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_p)$$

est la loi de probabilité invariante de A .

Partie C. Code Python

Dans cette partie, on choisit de représenter les vecteurs lignes par des listes et les matrices par des listes de listes.

Ainsi, le vecteur $(1 \quad 2 \quad 3)$ sera représenté par la liste $[1, 2, 3]$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

par la liste de listes suivante

$$[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9], [10, 11, 12]]$$

qu'on note aussi A .

4. Pour cette liste de listes A , quelles sont les valeurs retournées par `len(A)`, par `A[1]` et par `A[2][1]`.

5. Écrire une fonction `difference(x, y)` dont les arguments x et y sont les listes qui représentent deux vecteurs lignes x et y et qui retourne la liste représentant le vecteur ligne $x - y$.

Par exemple, si $x = (5, 2)$ et $y = (3, 7)$, l'exécution de `difference(x, y)` doit retourner la liste $[2, -5]$.

6. Écrire une fonction `itere(x, A)` dont les arguments x et A représentent un vecteur ligne x et une matrice A et qui retourne la liste représentant le vecteur ligne $x \cdot A$.

Par exemple, si $x = (1, 1)$ et si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

l'exécution de `itere(x, A)` doit retourner la liste $[5, 7]$.

7. Nous allons maintenant utiliser l'algorithme étudié dans la première partie pour calculer une valeur approchée de la loi de probabilité invariante de A .

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, on choisit

$$\mu_0 = (1/p \quad 1/p \quad \dots \quad 1/p)$$

et, pour une tolérance $\varepsilon > 0$ donnée, on considère que μ_k est une approximation satisfaisante de la loi invariante μ_∞ lorsque

$$\|\mu_k - \mu_{k-1}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

À l'aide des fonctions précédemment définies, écrire une fonction `loi_invariante(A, eps)` dont les arguments représentent la matrice stochastique A et la tolérance ε et qui retourne la loi de probabilité μ_k définie ci-dessus.

NB : la fonction `loi_invariante` n'a pas à vérifier que A est une matrice stochastique.

NB 2 : on n'hésitera pas, si le besoin s'en fait sentir, à définir une fonction auxiliaire.

8. On cherche un moyen d'approcher μ_∞ qui soit plus rapide que l'algorithme précédent sans pour autant devenir particulièrement complexe. Proposer une idée.

NB : on attend une proposition simple, étayée par des arguments de bon sens ; on ne demande pas d'écrire du code.

Solution I Produit de Kronecker

Partie A. Préliminaire

1. Par hypothèse,

$$u^1(x) = \lambda^1 \cdot x.$$

Si $u^n(x) = \lambda^n \cdot x$ pour un entier $n \geq 1$ [HR], alors

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x) &= u(u^n(x)) = u(\lambda^n \cdot x) = \lambda^n \cdot (\lambda \cdot x) \\ &= \lambda^{n+1} \cdot x. \end{aligned}$$

Et comme $u^0(x) = I(x) = x = 1 \cdot x = \lambda^0 \cdot x$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^n(x) = \lambda^n \cdot x.$$

✦ Le polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ se décompose sous la forme

$$T = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} T(u)(x) &= \sum_{k=0}^d a_k \cdot u^k(x) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot (\lambda^k \cdot x) \\ &= \left(\sum_{k=0}^d a_k \lambda^k \right) \cdot x = T(\lambda) \cdot x. \end{aligned}$$

2. Si u est diagonalisable, alors il existe une décomposition de E en somme directe :

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$$

où $E_k = \text{Ker}(u - \lambda_k I_E)$ est le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_k .

✦ Pour tout vecteur $x \in E$, il existe donc une décomposition

$$x = \sum_{k=1}^p x_k$$

avec $x_k \in E_k$ pour tout $1 \leq k \leq p$. On en déduit que

$$P(u)(x) = \sum_{k=1}^p P(u)(x_k)$$

par linéarité de $P(u)$. D'après 1.,

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad P(u)(x_k) = P(\lambda_k) \cdot x_k$$

puisque $u(x_k) = \lambda_k \cdot x_k$ (par définition des x_k).

Or, pour tout $1 \leq k \leq p$,

$$P(\lambda_k) = \prod_{i=1}^p (\lambda_k - \lambda_i) = 0$$

(à cause du facteur d'indice $i = k$) donc $P(u)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve que P est bien un polynôme annulateur de u .

REMARQUE.— On peut aussi raisonner matriciellement, mais c'est plus délicat, car il faut changer de notations

pour les valeurs propres (il y a n coefficients sur la diagonale, certains des λ_k pouvant apparaître plusieurs fois) : il existe une base dans laquelle u est représenté par la matrice

$$D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

et, dans cette base, $P(u)$ est représenté par

$$P(D) = \text{Diag}(P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)) = 0_n$$

car chaque α_i est l'un des λ_k .

3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de u , et $x \in E$, un vecteur propre de u associé à λ . En particulier, $x \neq 0_E$ (par définition même des vecteurs propres).

On a donc $u(x) = \lambda \cdot x$ et, d'après 1.,

$$Q(u)(x) = Q(\lambda) \cdot x.$$

Comme Q est un polynôme annulateur de u , on en déduit que

$$Q(\lambda) \cdot x = 0_E$$

et donc que $Q(\lambda) = 0$ puisque $x \neq 0_E$.

Toute valeur propre de u est donc une racine de Q , donc

$$\text{Sp}(u) \subset \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}.$$

✦ Comme les scalaires μ_k sont deux à deux distincts, les facteurs $(X - \mu_k)$ sont deux à deux premiers entre eux. On peut donc appliquer le Théorème de décomposition des noyaux : comme $Q(u)$ est l'endomorphisme nul,

$$E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}(u - \mu_k I_E).$$

Si $\mu_k \in \text{Sp}(u)$, alors $\text{Ker}(u - \mu_k I_E)$ est le sous-espace propre de u associé à μ_k et sinon, $\text{Ker}(u - \mu_k I_E) = \{0_E\}$. Ainsi,

$$E = \bigoplus_{\substack{1 \leq k \leq r \\ \mu_k \in \text{Sp}(u)}} \text{Ker}(u - \mu_k I_E)$$

et comme E est la somme directe des sous-espaces propres de u , on en conclut que u est diagonalisable.

Partie B. Un premier exemple

4. Comme $V \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est égal à

$$X^2 - (\text{tr } V)X + \det V = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2).$$

La matrice $V \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

✦ Plus précisément, en écrivant

$$V - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix},$$

on voit apparaître les vecteurs propres de V .

✦ Comme des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et, d'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}VP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(puisque $P^{-1}VP$ représente un endomorphisme u dans une base constituée d'un premier vecteur propre associé à 1 et d'un second vecteur propre associé à 2).

✦ Les formules de Cramer donnent

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(et ce calcul se fait de tête).

REMARQUE.— On a le choix entre $D = \text{Diag}(1, 2)$ et $D = \text{Diag}(2, 1)$, il n'y a pas d'autre possibilité. En revanche, pour la matrice P , on peut remplacer chaque colonne par une colonne qui lui est proportionnelle et on peut intervertir les deux colonnes – ce qui revient à échanger les positions des valeurs propres dans la matrice D .

5. Il y a plusieurs manières de prouver que Q est inversible (rang, noyau, déterminant...), mais la plus efficace consiste à calculer directement son inverse, à condition d'être bien inspiré !

Par analogie avec P^{-1} , on pose le produit ci-dessous et on calcule par blocs.

$$\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

On a ainsi démontré que la matrice Q était inversible et que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}.$$

En effectuant des produits par blocs, on constate que la matrice $W(A)$ est diagonalisable par blocs.

$$Q^{-1}W(A)Q = \begin{pmatrix} -A & -A \\ 6A & 4A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix}$$

6. Encore des produits par blocs !

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} R^{-1}A & 0_n \\ 0_n & 2R^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0_n \\ 0_n & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0_n \\ 0_n & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0_n \\ 0_n & R \end{pmatrix}^{-1},$$

donc le calcul précédent indique la matrice B est semblable à la matrice $\text{Diag}(\Delta, 2\Delta)$, qui est diagonale (puisque Δ est diagonale). La matrice B est donc diagonalisable.

Comme $W(A)$ est semblable à B (question précédente), on en déduit enfin que $W(A)$ est diagonalisable.

7. a. D'après 5., les matrices $W(A)$ et B sont semblables. Par conséquent, quel que soit le polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$, les

matrices $T(W(A))$ et $T(B)$ sont semblables (propriété rappelée au début de l'énoncé).

Si T est un polynôme annulateur de $W(A)$, alors $T(W(A)) = 0_{2n}$ et $T(B)$ est donc la matrice nulle. Mais comme B est diagonale par blocs, alors

$$T(B) = \begin{pmatrix} T(A) & 0_n \\ 0_n & T(2A) \end{pmatrix} = 0_{2n}$$

et en particulier $T(A) = 0_n$.

7. b. Si $W(A)$ est diagonalisable, alors il existe un polynôme T scindé à racines simples qui annule la matrice $W(A)$. D'après la question précédente, c'est aussi un polynôme annulateur de A et comme T est scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable.

Réciproquement, on a démontré au 6. que : si A est diagonalisable, alors $W(A)$ est aussi diagonalisable.

Par conséquent, $W(A)$ est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable.

Partie C. Un second exemple

8. Comme $E \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est égal à

$$X^2 - (\text{tr } E)X + \det E = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Puisque le polynôme caractéristique de E est scindé, la matrice E est trigonalisable.

✦ Comme

$$E - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (E - I_2)^2 = 0_2,$$

la matrice $E - I_2 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice 2.

Choisissons donc $C_2 \notin \text{Ker}(E - I_2)$, soit par exemple :

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie rapidement que

$$EC_1 = C_1 \quad \text{et que} \quad EC_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot C_2 + (-2) \cdot C_1.$$

Donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible (ses deux colonnes ne sont pas proportionnelles) et

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. On s'inspire du premier exemple pour construire la bonne matrice de passage à partir de la matrice P calculée à la question précédente.

Comme

$$\begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n},$$

on peut poser

$$Q = \begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$$

pour vérifier sans encombre que

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} -2A & A \\ A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = F.$$

La similitude cherchée est ainsi démontrée.

10. a. Supposons [HR] que

$$F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$$

pour un certain entier $k \geq 1$.

On en déduit que

$$F^{k+1} = \begin{pmatrix} A^k & -2kA.A^{k-1} \\ 0_n & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} A^{k+1} & -2(k+1)A.A^k \\ 0_n & A^{k+1} \end{pmatrix}$$

et comme [HR] est évidemment vérifiée pour $k = 1$, on en conclut qu'elle est vérifiée pour tout entier $k \geq 1$.

Comme d'autre part il est clair que

$$F^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0_n \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix},$$

on a ainsi démontré que

$$P(F) = \begin{pmatrix} P(A) & -2A.P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$$

lorsque P parcourt la base canonique $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

La dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ étant linéaire, on en déduit par combinaisons linéaires que

$$P(F) = \begin{pmatrix} P(A) & -2A.P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et en particulier pour $P = U$.

Mais U est, par hypothèse, un polynôme annulateur de F , donc

$$\begin{pmatrix} U(A) & -2A.U'(A) \\ 0_n & U(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

et en particulier $U(A) = 0_n$.

10. b. Par hypothèse, le polynôme U est scindé à racines simples, donc tout diviseur non constant de U est aussi scindé à racines simples.

Si P_0 est un diviseur non constant commun à U et à U' , alors il possède au moins une racine réelle α . Alors α est une racine commune à U et à U' et apparaît donc comme une racine *multiple* de U , ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Comme tout diviseur commun à U et U' est constant, ces deux polynômes sont premiers entre eux.

✦ D'après le Théorème de Bézout, il existe donc deux polynômes T_0 et T_1 tels que

$$T_0U + T_1U' = 1.$$

En substituant la matrice A à l'indéterminée X , on en déduit que

$$I_n = T_0(A)U(A) + T_1(A)U'(A) = T_1(A)U'(A)$$

puisque U est un polynôme annulateur de A (d'après la question précédente). Cela prouve que la matrice $U(A)$ est inversible, d'inverse $T_1(A)$.

10. c. Par **10. a.**, le produit $AU'(A)$ est nul. Or la matrice $U'(A)$ est inversible d'après **10. b.**, donc $A = 0_n$. Cela prouve que X est un polynôme annulateur unitaire de A et comme le degré du polynôme minimal est au moins égal à 1, X est bien le polynôme minimal de A .

11. Si la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, alors [9.] la matrice F aussi est diagonalisable. Dans ces conditions, il existe bien un polynôme U scindé à racines simples tel que $U(F) = 0_{2n}$ et d'après **10. c.** la matrice A est nulle.

Réciproquement, si $A = 0_n$, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = 0_{2n}$$

est diagonalisable, puisqu'elle est diagonale!

Conclusion : la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0_n$.

12. Comme la matrice F est triangulaire par blocs,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \chi_F(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - A & 2A \\ 0_n & \lambda I_n - A \end{vmatrix} \\ = [\det(\lambda I_n - A)]^2$$

donc $\chi_F = (\chi_A)^2$.

On sait que : une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

Donc : la matrice F est donc trigonalisable si, et seulement si, le polynôme caractéristique de A est scindé.

13. D'après 9., la matrice F est semblable à

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix},$$

donc ces deux matrices ont même polynôme caractéristique.

En choisissant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(matrice d'un quart de tour : on est géométriquement sûr de n'avoir aucun vecteur propre!), on a $\chi_A = X^2 + 1$, donc F n'est pas trigonalisable et la matrice

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont le polynôme caractéristique est égal à $(X^2 + 1)^2$, n'est pas trigonalisable dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$.

Partie D. Applications

14. On remarque que

$$M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

On se trouve donc dans la situation du premier exemple avec

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons donc suivre pas à pas la démarche de la partie B.

Comme $\text{tr} V = 2$ et $\det V = -3$, le polynôme caractéristique de V est égal à

$$X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1).$$

Avec

$$V - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

on peut choisir la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$Q = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie (comme on l'a déjà fait...) que

$$Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul matriciel par blocs donne alors

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 3A & 0_2 \\ 0_2 & -A \end{pmatrix}.$$

Le fait d'obtenir une matrice diagonale par blocs signifie qu'on a en fait trouvé deux sous-espaces supplémentaires stables et ces sous-espaces stables sont des plans, puisque les blocs diagonaux appartiennent à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, si on interprète la matrice Q comme la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_0 à une base

$$\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4),$$

la matrice $Q^{-1}MQ$ représente l'endomorphisme u dans la base \mathcal{B}_1 . Cela signifie que les plans

$$P_1 = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{et} \quad P_2 = \text{Vect}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

sont stables par u .

REMARQUE.— Si on n'a pas confiance dans les arguments théoriques précédents, on peut se lancer dans les calculs et appliquer la matrice M aux colonnes de la matrice de passage Q pour vérifier directement que les deux plans considérés sont stables par u .

Pour le plan P_1 :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour le plan P_2 :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

15. On se trouve à nouveau dans la situation du premier exemple avec

$$M = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ 2A & 4A \end{pmatrix}, \quad A = I_2 \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette fois,

$$\chi_V = X^2 - 8X + 12 = (X - 2)(X - 6).$$

On forme donc :

$$V - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V - 6I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à choisir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Par choix de P , on a donc

$$P^{-1}VP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

et, en reprenant les calculs du 5.,

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 6I_2 \end{pmatrix} = \text{Diag}(2, 2, 6, 6),$$

ce qui prouve que M est bien diagonalisable.

16. En posant

$$X_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix},$$

on peut remarquer que le système différentiel à résoudre équivaut à

$$X'_t = MX_t.$$

On pose alors

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}X_t$$

(pour la matrice Q définie à la question précédente). Comme la matrice Q^{-1} est indépendante du temps t , on en déduit que

$$Y'_t = Q^{-1}X'_t = Q^{-1}MX_t = (Q^{-1}MQ)(Q^{-1}X_t) = DY_t$$

ce qui se traduit par le système différentiel suivant

$$\begin{cases} y'_1(t) = 2y_1(t) \\ y'_2(t) = 2y_2(t) \\ y'_3(t) = 6y_3(t) \\ y'_4(t) = 6y_4(t) \end{cases}$$

(où, fait remarquable, les quatre équations sont découplées).

La solution général de ce système est donc de la forme

$$\begin{cases} y_1(t) = K_1 e^{2t} \\ y_2(t) = K_2 e^{2t} \\ y_3(t) = K_3 e^{6t} \\ y_4(t) = K_4 e^{6t} \end{cases}$$

ce qui nous donne enfin

$$X_t = QY_t = \begin{pmatrix} K_1 e^{2t} + K_3 e^{6t} \\ K_2 e^{2t} + K_4 e^{6t} \\ -K_1 e^{2t} + K_3 e^{6t} \\ -K_2 e^{2t} + K_4 e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Solution II ✨ Loi invariante d'une matrice stochastique

Partie A. Définitions

1. Pour $\mu = (a \ b)$, on a

$$\mu \cdot A = \frac{1}{4} \cdot (2a + b \quad 2a + 3b).$$

L'équation $\mu \cdot A = A$ se traduit par le système

$$\begin{cases} 2a + b = 4a \\ 2a + 3b = 4b \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -2a + b = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases}.$$

Les solutions de ce système (de rang 1) sont les couples (a, b) proportionnels au couple $(1, 2)$. Comme a et b sont positifs et que la somme $a + b$ doit être égale à 1, il existe donc bien une, et une seule, loi de probabilité μ invariante pour A , il s'agit de :

$$\mu = (1/3 \quad 2/3).$$

Partie B. Algorithme d'approximation

2. a. Par construction, la ligne μ_0 est une loi de probabilité.

Supposons que [HR] pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, la ligne μ_n soit une loi de probabilité.

Alors, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$m_{n+1,j} = \sum_{k=1}^p \underbrace{m_{n,k}}_{\geq 0 \text{ [HR]}} \cdot \underbrace{a_{k,j}}_{> 0} \geq 0$$

et aussi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p m_{n+1,j} &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p m_{n,k} a_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^p m_{n,k} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^p a_{k,j}}_{=1} \right) = \sum_{k=1}^p m_{n,k} = 1 \end{aligned}$$

car A est stochastique et μ_n est une loi de probabilité [HR]. On a ainsi vérifié que la ligne μ_{n+1} était aussi une loi de probabilité.

On a démontré par récurrence que toutes les lignes μ_n étaient des lois de probabilité.

2. b. On a vu à la question précédente que

$$m_{n+1,j} = \sum_{k=1}^p \underbrace{m_{n,k}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{a_{k,j}}_{> 0}$$

pour tout $1 \leq j \leq p$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, s'il existait un indice $1 \leq j \leq p$ tel que $m_{n+1,j} = 0$, alors

$$\forall 1 \leq k \leq p, \quad m_{n,k} = 0$$

et donc

$$\sum_{k=1}^p m_{n,k} = 0.$$

Or μ_n est une loi de probabilité, donc

$$\sum_{k=1}^p m_{n,k} = 1.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq j \leq p, \quad m_{n+1,j} > 0$$

ou, si on préfère,

$$\forall n \geq 1, \forall 1 \leq j \leq p, \quad m_{n,j} > 0.$$

2. c. La matrice A compte un nombre FINI de coefficients et ils sont tous strictement positifs par hypothèse. Par conséquent, le réel

$$\alpha = \min_{1 \leq i, j \leq p} a_{i,j}$$

est bien défini et strictement positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la ligne μ_n est une loi de probabilité, donc

$$\forall 1 \leq j, k \leq p, \quad m_{n,k} a_{k,j} \geq m_{n,k} \alpha$$

et aussi

$$\begin{aligned} \forall 1 \leq k \leq p, \quad m_{n+1,j} &= \sum_{k=1}^p m_{n,k} a_{k,j} \\ &\geq \sum_{k=1}^p m_{n,k} \alpha \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^p m_{n,k} \right) \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que

$$\forall n \geq 1, \forall 1 \leq j \leq p, \quad m_{n,j} \geq \alpha > 0.$$

REMARQUE.— La propriété est *a priori* fautive pour μ_0 : rien n'indique dans l'énoncé que les réels $m_{0,j}$ soient tous strictement positifs (ils sont tous positifs et, comme leur somme est égale à 1, l'un d'entre eux au moins est strictement positif).

3. a. Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|\mu_n - \mu_\infty\|_\infty &= \max_{1 \leq j \leq p} |m_{n,j} - m_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^p |m_{n,j} - m_j|. \end{aligned}$$

Une somme de p suites de limite nulle est encore une suite de limite nulle. Par encadrement, on vient de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n - \mu_\infty\|_\infty = 0.$$

3. b. D'après 2.c.,

$$\forall 1 \leq j \leq p, \forall n \geq 1, \quad m_{n,j} \geq \alpha > 0.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall 1 \leq j \leq p, \quad m_j \geq \alpha > 0.$$

3. c. D'après la question précédente, tous les m_j sont positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait par 2.a. que

$$\sum_{j=1}^p m_{n,j} = 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\sum_{j=1}^p m_j = 1.$$

Donc μ_∞ est bien une loi de probabilité.

✦ On a vu au 2.a. que

$$\forall 1 \leq j \leq p, \forall n \in \mathbb{N}, \quad m_{n+1,j} = \sum_{k=1}^p m_{n,k} a_{k,j}. \quad (*)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall 1 \leq j \leq p, \quad m_j = \sum_{k=1}^p m_k a_{k,j}$$

(suite extraite dans le membre de gauche ; combinaison linéaire de suites convergentes dans le membre de droite). Autrement dit : $\mu_\infty \cdot A = \mu_\infty$, donc μ_∞ est bien une loi de probabilité invariante de A et, d'après le Théorème de Perron-Frobenius (admis par l'énoncé), c'est la probabilité invariante de A .

Partie C. Code Python

4. Par construction, A est une liste de quatre listes, donc $\text{len}(A)$ vaut 4.

L'expression $A[1]$ désigne l'élément d'indice 1 de la liste A , c'est donc le deuxième élément de A (puisque les indices commencent à 0). Donc $A[1]$ est la liste $[4, 5, 6]$.

De même, l'expression $A[2][1]$ désigne le second élément de la deuxième liste de A . Donc $A[2][1]$ est égal à 8.

5. On écrit une fonction qui s'applique à des listes de taille quelconque, en supposant que les deux arguments soient des listes de même taille.

```
def difference(x, y):
    p = len(x)
    d = [ x[k]-y[k] for k in range(p) ]
    return d
```

6. Ici encore, on écrit une fonction qui reproduit strictement la formule (*) et s'applique à des listes de taille quelconque. La compatibilité des tailles de x et de A est admise (sans être vérifiée par la fonction).

```
def itere(x, A):
    p = len(x)
    y = []
    for j in range(p):
        s = 0
        for k in range(p):
            s += x[k]*A[k][j]
        y.append(s)
    return y
```

7. On calcule la norme d'un vecteur à l'aide d'une fonction auxiliaire.

```
def norme(d):
    return max([abs(dk) for dk in d])
```

Le calcul approché de la loi invariante n'a plus qu'à suivre l'algorithme présenté dans l'énoncé. Le test d'arrêt demande de connaître à chaque itération les listes qui représentent μ_{k-1} et μ_k .

```
def loi_invariante(A, eps):
    p = len(A)
    x = [ 1/p ]*p # mu_0
    y = itere(x, A) # mu_1 = mu_0 * A
    while (norme(difference(x, y)) > eps):
        x = y # mu_{k-1}
        y = itere(x, A) # mu_k = mu_{k-1} * A
    return y
```

8. Au lieu de calculer toutes les lignes successives μ_n , on peut se contenter d'en calculer une suite extraite, en s'inspirant de l'algorithme d'exponentiation rapide.

Ainsi, à chaque itération, on effectue deux produits matriciels :

$$M \leftarrow M^2 \quad \text{et} \quad \mu \leftarrow \mu \cdot M$$

à partir de $M = A$ et $\mu = \mu_0$. On vérifie par récurrence que, à la k -ième itération, M est égale à A^{2^k} et μ à $\mu_{2^{k+1}-1}$. Il est raisonnable de considérer que le test d'arrêt sera satisfait beaucoup plus vite, ce qui compensera très largement le nombre plus important d'opérations effectuées à chaque itération.