Calcul différentiel [115.3]

On poursuit l'étude menée au **[115.1]** *avec des EDP du second ordre, en reprenant les mêmes notations.*

*Nous devrons dans un premier temps appliquer la règle de la chaîne pour les dérivées partielles secondes (***méthode à connaître***).*

Autre nouveauté : il faut ici trouver soi-même le changement de variables.

⋆

► On suppose ici que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc que, quel que soit le changement de variables linéaire φ, la fonction g est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On pourra donc librement appliquer le Théorème de Schwarz à ces deux fonctions.

► Quel que soit le changement de variables linéaire φ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + c \cdot \frac{\partial g}{\partial v}, \tag{a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = b \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + d \cdot \frac{\partial g}{\partial v}. \tag{b}$$

▷ On en **déduit** les dérivées secondes en composant ces opérateurs différentiels.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= a \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right\} + c \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right\} && \text{(linéarité)} \\
&= a \cdot \left\{a \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right\} && \text{(par (a))} \\
&\quad + c \cdot \left\{a \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right\} && \text{(idem)}
\end{aligned}$$

Le Théorème de Schwarz permet de simplifier le résultat.

$$\frac{\partial^f}{\partial x^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ac \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \tag{1}$$

▷ De même par rapport à y !

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2bd \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + d^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \tag{2}$$

▷ Puisque le Théorème de Schwarz peut s'appliquer, on a le choix pour la dérivée partielle seconde croisée à calculer...

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{b \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + d \cdot \frac{\partial g}{\partial v}\right\} && \text{(par (b))} \\
&= b \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right\} + d \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right\} && \text{(linéarité)} \\
&= b \cdot \left\{a \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)\right\} && \text{(par (a))} \\
&\quad + d \cdot \left\{a \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) + c \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)\right\} && \text{(idem)}
\end{aligned}$$

On simplifie avec le Théorème de Schwarz.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ab \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (ad + bc) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + cd \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \tag{3}$$

(5) D'après les relations (1) et (2),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a^2 - b^2) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2(ac - bd) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (c^2 - d^2) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Il nous reste **[115.1] deux** degrés de liberté pour définir le changement de variables φ. On va choisir φ de telle sorte que **deux** des trois coefficients de l'EDP en g soient nuls de telle sorte qu'on puisse appliquer l'un des résultats du **[110]**.

► Une piste est d'imposer $a^2 = b^2$ et $c^2 = d^2$, outre la contrainte $ad - bc \neq 0$. Avec $a = b = 1$ et $c = -d = 1$, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$$

et en invoquant **[110.3]**, on peut conclure : la fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions K_1 et K_2 de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = K_1(u) + K_2(v) = K_1(x + y) + K_2(x - y).$$

REMARQUE.— Revoir **[115.1]** et **[114]** pour tous les détails qu'on peut omettre avec un peu d'expérience.

► La piste que nous avons choisie pour définir φ est la seule possible...

En effet, si on avait choisi $a = b \neq 0$ et $ac - bd = 0$, on aurait dû prendre $c = d$ et φ n'aurait pas été bijective !

De même, si on avait choisi $a = -b \neq 0$ et $ac - bd = 0$, on aurait dû prendre $c = -d$ et φ n'aurait pas non plus été bijective...

(6) Même méthode ! Il faut en outre savoir factoriser... D'après (1), (2) et (3),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}& \\ = (a - b)^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &- 4(a - b)(c - d) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (c - d)^2 \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

▷ Le premier choix de changement de variables consiste à imposer $a = b$ et $c \neq d$. (L'autre choix consiste à imposer $a \neq b$ et $c = d$, ce qui est le *symétrique* du précédent : rien de vraiment différent à en attendre.)

▷ Prenons donc $a = b = c = 1$ et $d = 0$, c'est-à-dire $u = x + y$ et $v = x$. Il nous reste

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$$

et d'après **[110.2]** la fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP si, et seulement si, il existe deux fonctions K_1^0 et K_2^0 de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned}\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) &= K_1^0(u) + v \cdot K_2^0(u) \\ &= K_1^0(x + y) + x \cdot K_2^0(x + y).\end{aligned}$$

▷ Par curiosité, regardons ce qui se passe avec $a = b = c = 1$ et $d = -1$, c'est-à-dire $u = +y$ et $v = x - y$. L'EDP vérifiée par f se ramène une fois encore à la même EDP en g :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

Par conséquent, la fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP si, et seulement si, il existe deux fonctions K_1^1 et K_2^1 de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned}\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y) &= K_1^1(u)+v\cdot K_2^1(u)\\ &= K_1^1(x+y)+(x-y)\cdot K_2^1(x+y)\\ &= \underbrace{\left[K_1^1(x+y)-(x+y)\cdot K_2^1(x+y)\right]}_{=K_1^0(x+y)}+x\cdot\underbrace{K_2^1(x+y)}_{=K_2^0(x+y)}\end{aligned}$$

et, comme on le voit, le résultat est présenté différemment — mais c'est bien le même !

(7) Toujours pareil... Et il faut toujours savoir factoriser ! L'EDP vérifiée par f devient

$$(a-b)(2a+b)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+(4ac+2bd-3ad-3bc)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+(c-d)(2c+d)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=0.$$

On va choisir $a=b\neq 0$ et $2c+d=0$ pour éliminer le premier et le troisième terme en conservant la bijectivité de φ. Dans ces conditions, le coefficient du second terme est égal à $a(c-d)\neq 0$. Une fois encore, on est ramené à l'équation

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$$

et en fixant *par exemple* $a=b=1$, $c=1$ et $d=-2$, c'est-à-dire

$$u=x+y\quad\text{et}\quad v=x-2y,$$

on conclut comme d'habitude : la fonction $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est solution de l'EDP si, et seulement si, il existe deux fonctions ψ_1 et ψ_2 de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\psi_1(u)+\psi_2(v)=\psi_1(x+y)+\psi_2(x-2y).$$