Calcul différentiel [114]

La première EDP entrée dans l'histoire de la Science !

Comme sa résolution repose sur un changement de variables linéaire, elle est aussi entrée dans l'histoire de la Taupe...

$\star$

[114.1]

► On commence par étudier la régularité de f.

Les deux fonctions $[(x,t) \mapsto x+ct]$ et $[(x,t) \mapsto x-ct]$ sont linéaires, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ici, les fonctions g et h sont supposées de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, les fonctions

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & x+ct & \longmapsto & g(x+ct) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & x-ct & \longmapsto & h(x-ct) \end{array}$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

► Pour calculer les dérivées partielles secondes, le bon sens recommande de calculer d'abord les dérivées partielles premières, de les simplifier et de les re-dériver enfin.

▷ On l'a vu, on *compose* des fonctions pour calculer f. Il nous faudra donc appliquer la règle de la chaîne pour calculer les dérivées partielles.

Pour y parvenir sans encombres, nous allons convenir que $g = g(u)$ est une fonction de **la variable** $u \in \mathbb{R}$, que $h = h(v)$ est une fonction de **la variable** $v \in \mathbb{R}$.

Dans le même esprit, nous considérons aussi les **fonctions** $u(x,t) = x+ct$ et $v(c,t) = x - ct$, qui nous donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -c.$$

▷ On dérive une somme...

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{dg}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dh}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = g'(x+ct) + h'(x-ct) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{dg}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dh}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial t} = c\cdot\big[g'(x+ct) - h'(x-ct)\big] \end{aligned}$$

▷ Et on dérive encore...

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = g''(x+ct) + h''(x-ct) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big) = c^2\cdot\big[g''(x+ct) + (-1)^2 h''(x-ct)\big] \end{aligned}$$

pour arriver à l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

[114.2]

► L'application $\varphi = [(x,t) \mapsto (x+ct, x-ct)]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie. Par conséquent, il s'agit bien d'une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice (relative à la base canonique) de cet endomorphisme est

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

et comme $c > 0$, cette matrice est inversible. Donc φ est bien une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Enfin, la bijection réciproque est linéaire (comme φ...), donc elle est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Conclusion : φ est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (et Huyghens ne le savait pas).

► En tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

la fonction $F = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

► Nous allons maintenant chercher une EDP *de référence* vérifiée par la fonction F. Il nous faut pour cela exprimer les dérivées partielles de f en fonction des dérivées partielles de F et donc utiliser la règle de la chaîne (puisque $f = F \circ \varphi$ est une *composée* de fonctions).

▷ Nous allons donc encore utiliser les *fonctions* $u = u(x, t) = x + ct$ et $v = v(x, t) = x - ct$ et considérer que F est une fonction des *variables* u et v.

▷ Techniquement, ces deux fonctions u et v sont les **composantes** du changement de variables φ.

$$\forall\, (x, t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x, t) = \big(u(x, t),\ v(x, t)\big)$$

▷ On calcule d'abord les dérivées premières...

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \qquad (\star_x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = c \cdot \frac{\partial F}{\partial u} - c \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \qquad (\star_t)$$

▷ Pour calculer les dérivées secondes, on dérive les dérivées premières.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\Big) \qquad (\dagger_x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\Big) \qquad (\dagger_t)$$

▷ **Pause le temps de réfléchir !**

Pour calculer les dérivées partielles de f, on a appliqué la règle de la chaîne parce qu'on considère ici que $f = f(x, t)$ est en fait une *composée* de fonctions :

$$f(x, t) = F\big(u(x, t),\ v(x, t)\big).$$

Dans les expressions des dérivées secondes qu'on a obtenues, c'est exactement la même chose, mais ça se voit mieux ! En effet, dans les parenthèses, il y a des fonctions de u et v (règle 2 du poly). Comme on veut les dériver par rapport à x et t, c'est qu'on veut les traiter comme des fonctions de x et t (règle 1 du poly) et pour cela, on fait intervenir φ.

Cette intervention est implicite (c'est là son défaut) et on se reportera aux relations (2a) et (2b) du poly pour la voir apparaître explicitement.

▷ Maintenant, on y retourne ! Il s'agit d'appliquer aux expressions entre parenthèses dans $(\dagger_x)$ et $(\dagger_y)$ les formules $(\star_x)$ et $(\star_y)$. On peut se souvenir de la manœuvre en imaginant qu'on *compose* la règle de la chaîne avec elle-même.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)\Big\} + \Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)\Big\} \\ &= \underbrace{\Big\{\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)\Big\}}_{\star_x} + \underbrace{\Big\{\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)\Big\}}_{\star_x} \end{aligned}$$

(On a appliqué deux fois la formule $(\star_x)$, une fois en remplaçant F par $\frac{\partial F}{\partial u}$, l'autre fois en remplaçant F par $\frac{\partial F}{\partial v}$.)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= c\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right\} - c\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)\right\} \\
&= c\cdot\left\{\underbrace{c\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - c\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)}_{\star_t}\right\} - c\cdot\left\{\underbrace{c\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) - c\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)}_{\star t}\right\}
\end{aligned}$$

(Idem, en appliquant $\star_t$.)

▷ Le plus dur est fait ! On va simplifier en tenant compte du Théorème de Schwarz **[60]**, qui peut être appliqué puisque F est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. (Ouf !)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= c^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2c^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + c^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}. \tag{‡}$$

▷ **Nouvelle pause le temps de réfléchir encore !** (et clarifier la suite des opérations)

La relation précédente peut aussi bien être comprise comme une égalité entre fonctions des variables x et t :

$$\forall\,(x,t)\in U=\mathbb{R}^2,$$
$$[\partial_1(\partial_1 f)](x,t) - \frac{1}{c^2}\cdot[\partial_2(\partial_2 f)](x,t) = 4[\partial_1(\partial_2 F)]\big(\underbrace{\varphi(x,t)}_{=(u,v)}\big)$$

que comme une égalité entre fonctions des variables u et v :

$$\forall\,(u,v)\in W=\mathbb{R}^2,$$
$$[\partial_1(\partial_1 f)](x,t) - \frac{1}{c^2}\cdot[\partial_2(\partial_2 f)]\big(\underbrace{\varphi^{-1}(u,v)}_{=(x,t)}\big) = 4[\partial_1(\partial_2 F)](u,v)$$

parce que φ est un difféomorphisme de U sur W.

▷ La bijectivité de φ nous permet de déduire de (‡) que la fonction $f\in\mathscr{C}^2(U)$ est une solution sur U de l'EDP

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

si, et seulement si, la fonction $F = f\circ\varphi^{-1}\in\mathscr{C}^2(W)$ est une solution sur W de l'EDP

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0.$$

(Non, le facteur 4 n'a aucun intérêt.)

▷ Attention ! Lorsque le changement de variables n'est pas linéaire, les ouverts U et W sont différents et ça peut créer de la misère si on n'a pas pris dès le début l'habitude de distinguer l'ouvert U qui contient les (x,t) et l'ouvert W qui contient les (u,v).

► Bref... On s'est ramené à la résolution d'une EDP de référence **[110.3]**. Donc on sait que : la fonction F est solution de

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(u,v)\in W,\quad F(u,v) = g(u) + h(v).$$

On invoque une dernière fois le changement de variables : la fonction $f = F \circ \varphi$ est donc solution de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} \forall\, (x, t) \in U, \quad f(x, t) &= F\big(\varphi(x, t)\big) = F(x + ct, x - ct) \\ &= g(x + ct) + h(x - ct). \end{aligned}$$

► Un peu de physique pour terminer ?

Le terme $g(x + ct)$ prend la même valeur pour $(t, x) = (t_0, x_0)$ et pour $(t, x) = (0, x_0 + ct_0)$. Comme $c > 0$, si $t_0 > 0$, alors on a $x_0 < x_0 + ct_0$: l'onde décrite par $g(x + ct)$ progresse de la droite vers la gauche.

Symétriquement, le terme $g(x - ct)$ prend la même valeur pour $(t, x) = (t_0, x_0)$ et pour $(t, x) = (0, x_0 - ct_0)$. Cette fois, si $t_0 > 0$, alors $x_0 > x_0 - ct_0$: l'onde décrite par $h(x - ct)$ progresse de la gauche vers la droite.

Gloire à Huyghens !