Réduction des endomorphismes

Démontrer que les matrices suivantes sont semblables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trigonaliser une matrice, c'est assez classique. Mais ici, le problème posé est un peu plus subtil : il faut arriver à une matrice triangulaire imposée.

Nous allons essayer d'y voir clair (sans pour autant aller jusqu'à évoquer la forme de Jordan).

NB : pour des raisons de rapidité typographique, je confonds les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et les vecteurs colonnes qui les représentent dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

⋆

► On s'inspire de T pour étudier A : si l'énoncé dit vrai, la seule valeur propre de A est égale à 1 et le sous-espace propre associé est un plan. Vérifions-le !

▷ Il est clair que la matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice de rang 1, donc son noyau est un plan.

Plus précisément, en cherchant les relations de liaison entre les colonnes de $(A - I_3)$, on trouve

$$\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}(e_1 = (1,0,1),\ e_2 = (3,1,0)) = [-x + 3y + z = 0].$$

(J'ai calculé un vecteur normal au plan en formant le produit vectoriel des deux vecteurs e_1 et e_2.)

▷ Par conséquent, si la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 1 & 0 & \star \end{pmatrix}$$

est inversible, alors on déduit de la formule du changement de base que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, les deux premières colonnes de P sont les vecteurs propres e_1 et e_2 associés à la valeur propre 1 et comme deux matrices semblables ont *même trace*, il faut bien que le troisième coefficient diagonal soit égal à 1.

▷ Dès lors, on sait que le polynôme caractéristique de A est scindé et donc que A est trigonalisable.

▷ Choisissons un vecteur e_3 n'importe où en dehors du sous-espace propre $\operatorname{Ker}(A - I_3)$: par exemple, $e_3 = (1,0,0)$ (pour faire simple). On en déduit que

$$Ae_3 = e_3 + (1,1,-2) = e_3 + [-2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2].$$

Conclusion : on a bien trigonalisé A

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais la matrice triangulaire obtenue n'est pas la bonne !

► Réfléchissons un peu plus. Nous n'avons pas calculé le polynôme minimal de A, c'est un grand tort, car le polynôme minimal a toujours des choses à nous dire.

▷ On vérifie rapidement que $(A - I_3)^2 = 0_3$ et donc que le polynôme minimal de A est égal à $(X-1)^2$.

Au passage, la relation $(A - I_3) \times (A - I_3) = 0_3$ implique que

$$\mathrm{Im}(A - I_3) \subset \mathrm{Ker}(A - I_3)$$

et la matrice $(A - I_3)$ écrite plus haut nous dit plus précisément :

$$\mathrm{Im}(A - I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, -2) \subset \mathrm{Ker}(A - I_3).$$

▷ En conséquence, si on choisit e_3 n'importe où en dehors de $\mathrm{Ker}(A - I_3)$, on aura forcément un scalaire α tel que

$$(A - I_3)(e_3) = \alpha \cdot (1, 1, -2)$$

et ce scalaire α n'est pas nul parce que $e_3 \notin \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Quitte à remplacer e_3 par $(^1/_\alpha) \cdot e_3$, on peut supposer que $\alpha = 1$.

▷ Le problème posé est donc de trouver une base (e_1, e_2) du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ telle que

$$Ae_3 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + e_3$$

c'est-à-dire

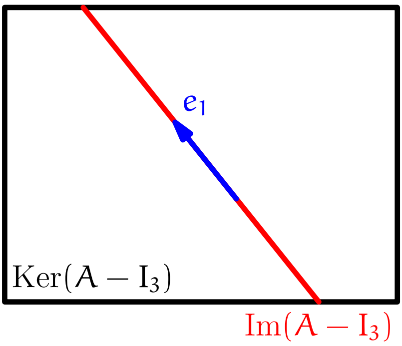
$$a \cdot e_1 + b \cdot e_2 = (1, 1, -2)$$

<u>où les scalaires a et b sont fixés à l'avance</u> ($a = b = 1$ si on respecte l'énoncé).

Deux situations se présentent.

▷ Premier cas : si $b = 0$ (cas très particulier), alors $a \cdot e_1 = (1, 1, -2)$, donc $a \neq 0$ et par conséquent, il faut que

$$e_1 = \frac{1}{a} \cdot (1, 1, -2) \in \mathrm{Im}(A - I_3).$$

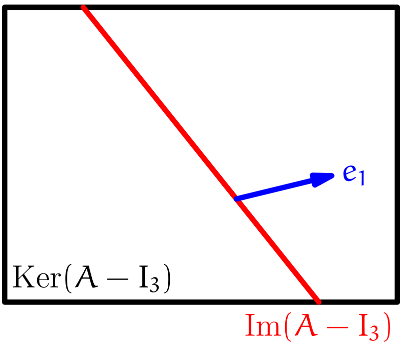


On peut alors choisir e_2 dans $\mathrm{Ker}(A - I_3)$, arbitrairement (puisque $b = 0$) mais pas tout à fait (il faut que e_2 ne soit pas colinéaire à e_1).

▷ Deuxième cas : si $b \neq 0$ (cas général), alors on choisit $e_1 \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$ n'importe où hors de la droite $\mathrm{Im}(A - I_3)$ et on pose

$$e_2 = \frac{1}{b} \cdot \big((1, 1, -2) - a \cdot e_1\big) \in \mathrm{Ker}(A - I_3).$$

Comme $e_1 \notin \mathbb{R} \cdot (1, 1, -2)$, on en déduit que e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan $\mathrm{Ker}(A - I_3)$.



► Conclusion :

Le vecteur e_3 peut être choisi arbitrairement, du moment que $e_3 \notin \mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Quels que soient $(a, b) \neq (0, 0)$, on peut trouver une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ telle que $Ae_3 = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + e_3$ avec une grande manœuvre à condition de procéder avec méthode : il faut partir de la relation qu'on cherche à obtenir, pas d'une base du sous-espace $\mathrm{Ker}(A - I_3)$!