Calcul différentiel [115.1]

Dans un cadre scolaire (et dans un cadre scolaire uniquement !), il suffit souvent d'un changement de variables linéaire pour pouvoir résoudre une EDP, en se ramenant à une EDP de référence.

Je commence par quelques généralités utiles à connaître sur les changements de variables linéaires et en particulier sur la manière de s'en servir de manière autonome.

⋆

► On considère une fonction $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et un changement de variables linéaire $\varphi \in GL(\mathbb{R}^2)$:

$$\varphi(x, y) = (ax + by,\ cx + dy) = \big(u(x, y),\ v(x, y)\big).$$

Dans cette écriture, u et v sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, ce sont les **composantes** de l'application φ.

▷ Du fait que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, il s'agit d'une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ **[64.1]** et sa bijection réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (puisqu'elle est linéaire elle aussi). Par conséquent, φ est bien un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (cf **[85.1]**).

▷ Comme φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, on peut alors définir une autre fonction $g = g(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (g \circ \varphi)(x, y)$$

ce qui revient au même que

$$\forall\,(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u, v) = (f \circ \varphi^{-1})(u, v).$$

Dans cette dernière égalité, u et v sont cette fois des **variables** et non plus des fonctions.

▷ Enfin, comme φ et φ^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^\infty$,
– si f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors $g = f \circ \varphi^{-1}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$;
– si g est de classe $\mathscr{C}^n$, alors $f = g \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$.

Autrement dit : la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ si, et seulement si, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^n$.

► Quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, l'application $\lambda \cdot \varphi$ est aussi un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Ces deux changements de variables ne diffèrent que par un **changement d'échelle** : le facteur λ ne modifie que l'unité de calcul.

Par conséquent, même si l'expression de $\varphi(x, y)$ fait apparaître quatre coefficients a, b, c et d, nous ne disposons réellement que de **trois degrés de liberté** pour choisir φ.

D'autre part, puisque φ doit être bijective, il faut que $ad - bc \neq 0$, ce qui impose une **première contrainte**, indépendante de tous les calculs ultérieurs.

Il nous reste donc juste assez de degrés de liberté pour **deux contraintes supplémentaires**.

(1) On conserve les notations précédentes dans tous les exercices qui suivent.

► On applique la règle de la chaîne pour exprimer les dérivées partielles de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \cdot \frac{\partial g}{\partial u} + 3 \cdot \frac{\partial g}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial u}. \tag{1}$$

► La suite du raisonnement est mécanique et demande donc la plus extrême rigueur (quantificateurs et composition des fonctions). Mais comme c'est mécanique, une fois qu'on a bien compris comment ça marche, on peut brûler les étapes et donner le résultat beaucoup plus vite...

▹ La relation (1) doit être comprise de la manière suivante (toujours la même).

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-3\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial g}{\partial u}\big(\varphi(x,y)\big)$$

Une fonction $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est donc solution de l'EDP

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-3\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \tag{2}$$

si, et seulement si, la fonction g est solution de

$$\forall\,(x,y)\in U=\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial g}{\partial u}\big(\varphi(x,y)\big)=0$$

ce qui revient à

$$\forall\,(u,v)\in W=\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0$$

puisque φ réalise une bijection de $U=\mathbb{R}^2$ sur $W=\mathbb{R}^2$.

▹ On reconnaît ici une EDP de référence **[109.2]**. La fonction g est donc solution de cette EDP si, et seulement si, il existe une fonction $h\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad g(u,v)=h(v).$$

On invoque à nouveau la bijectivité de φ pour en déduire que f est solution de l'EDP (2) si, et seulement si, il existe une fonction $h\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned}\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(g\circ\varphi)(x,y)&=g\big(u(x,y),\ v(x,y)\big)\\&=h\big(v(x,y)\big)=h(3x+y).\end{aligned}$$

(Dans cette dernière étape, on traite u et v comme des fonctions de x et y parce qu'on cherche à exprimer la solution f comme une fonction de x et y.)

(3) Même méthode ! Cette fois :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v}\qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial v}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}. \tag{3}$$

► Le même raisonnement que le précédent nous assure que la fonction $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de l'EDP homogène

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \tag{4}$$

si, et seulement si, il existe une fonction $h\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=h(y-x).$$

(Non, la question n'était pas posée, mais j'y réponds quand même.)

► Comme dans le premier exemple, la relation (3) nous dit que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial u}\big(\varphi(x,y)\big)$$

et comme $f(x,y)=g\big(\varphi(x,y)\big)$, on en déduit que la fonction $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f(x,y) \tag{5}$$

si, et seulement si, la fonction g est une solution de l'EDP

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial g}{\partial u}\big(\varphi(x,y)\big)=g\big(\varphi(x,y)\big)$$

ce qui revient à

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=g(u,v) \tag{6}$$

puisque la fonction φ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

▷ Si on raisonne à v fixé, avec u pour seule variable, on peut interpréter cette dernière EDP comme une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.

La fonction $g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ vérifie l'EDP (6) si, et seulement si, pour tout $v_0\in\mathbb{R}$ (fixé, donc !), la fonction $[u\mapsto g(u,v_0)]$ est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\,u\in\mathbb{R},\quad z'(u)-z(u)=0$$

ce qui revient à dire que, pour tout $v_0\in\mathbb{R}$, il existe une constante $K(v_0)\in\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,u\in\mathbb{R},\quad g(u,v_0)=K(v_0)e^u.$$

▷ Il faut bien comprendre ce qu'on vient de faire ici : en résolvant l'équation différentielle après avoir fixé $v=v_0$, on fait a priori dépendre la constante d'intégration de la valeur de v_0. Autrement dit, on a ainsi défini point par point une fonction $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

▷ Avant de continuer, il faut remarquer que la fonction K n'est pas complètement arbitraire, quoiqu'elle soit définie point par point. En effet,

$$\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad K(v)=e^{-u}g(u,v)$$

et en particulier (pour $u=0$) $K(v)=g(0,v)$. On en déduit que la fonction K est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{lin.}} & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ v & \longmapsto & (0,v) & \longmapsto & g(0,v)\end{array}$$

▷ On peut maintenant conclure : la fonction $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de l'EDP (5) si, et seulement si, il existe une fonction $K\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{aligned}\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)&=K\big(v(x,y)\big)e^{u(x,y)}\\ &=K(y-x)e^x.\end{aligned}$$

(4) C'est toujours pareil, donc je réduis les explications au minimum.

D'après le changement de variables proposé,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial g}{\partial v}\quad\text{donc}\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=2\cdot\frac{\partial g}{\partial u}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x+y)^2=[u(x,y)]^2\\ &\qquad\iff \forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad 2\cdot\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=u^2\\ &\qquad\iff \forall\,v_0\in\mathbb{R},\ \exists\,K(v_0)\in\mathbb{R},\ \forall\,u\in\mathbb{R},\quad g(u,v_0)=\frac{u^3}{6}+K(v_0).\end{aligned}$$

On a ainsi défini une fonction $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $K(v)=g(u,v)-{}^{u^3}\!/_{6}$ pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ et en particulier telle que

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{linéaire}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)} & \mathbb{R}\\ v & \longmapsto & (0,v) & \longmapsto & g(0,v)=K(v)\end{array}$$

ce qui montre que la fonction K est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On peut alors conclure, en conservant le détail des arguments : la fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est une solution de l'EDP

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+y)^2$$

si, et seulement si, il existe une fonction $K \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad g(u,v) = \frac{u^3}{6} + K(v)$$

c'est-à-dire

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (g \circ \varphi)(x,y) = \frac{[u(x,y)]^3}{6} + K\big(v(x,y)\big)$$

soit enfin :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = K(x-y) + \frac{(x+y)^3}{6}.$$

On peut remarquer que cette solution est la somme d'une solution particulière : $(x+y)^3/6$ et de la solution générale de l'équation homogène, résolue au début du **(3)**.

À suivre au ***[115.3]***