Calcul différentiel [120]

Un autre exemple de changement de variables non linéaire. La bijectivité de φ est ici établie en exprimant la réciproque φ^{-1}. Cette expression ne nous servira à rien d'autre...

Comme d'habitude, le changement de variables nous sert à transformer l'EDP en une équation différentielle (qu'on sait résoudre).

⋆

► Posons $\varphi(u,v) = \left(\frac{u^2+v^2}{2},\ v\right)$ pour tout $(u,v) \in \Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

▷ Comme les deux composantes de φ :

$$x(u,v) = \frac{u^2+v^2}{2} \quad \text{et} \quad y(u,v) = v$$

sont polynomiales, il est clair que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Δ.

▷ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche à quelle condition sur (x,y) le système

$$\varphi(u,v) = (x,y)$$

admet au moins une solution $(u,v) \in \Delta$ (surjectivité de φ) et si ce système admet exactement une solution (injectivité de φ).

Il est clair que

$$\begin{cases} x = \frac{u^2+v^2}{2} \\ y = v \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y^2 = u^2 \\ \qquad\ \ y = v \end{cases}$$

(Assurez-vous de bien comprendre qu'il s'agit ici de 2 implications !)

On impose $(u,v) \in \Delta$, donc $u > 0$ et $u^2 > 0$. La première équation montre donc que, si $2x-y^2 \leqslant 0$, alors ce système ne peut pas avoir de solution dans Δ.

Réciproquement, si $2x - y^2 > 0$, alors

$$\begin{cases} 2x - y^2 = u^2 \\ \qquad\ \ y = v \end{cases} \iff \begin{cases} u = \sqrt{2x-y^2} \\ v = y \end{cases}$$

car $u > 0$.

On a ainsi démontré que ce système admettait une unique solution pour tout $(x,y) \in U = [y^2 - 2x < 0]$ et n'admettait pas de solution pour $(x,y) \notin U$.

Par conséquent, φ réalise bien une bijection de Δ sur U et

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad \varphi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{2x-y^2},\ y\right).$$

La deuxième composante est linéaire, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et, par restriction, sur U. Quant à la première composante :

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\text{polyn.}} & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x-y^2 & \longmapsto & \sqrt{2x-y^2} \end{array}$$

elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U en tant que composée : on rappelle que $\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais seulement continue sur $\mathbb{R}_+$).

► Puisque nous disposons d'un authentique changement de variables certifié, eh bien, changeons de variables ! On pose :

$$\forall\,(u,v) \in \Delta, \quad g(u,v) = (f \circ \varphi)(u,v)$$

ce qui revient à $f(x,y) = (g \circ \varphi^{-1})(x,y)$ pour tout $(x,y) \in U$.

Comme φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Δ, il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si, et seulement si, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Δ.

▷ Il est clair sur la définition de φ que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1.$$

▷ Appliquons maintenant la règle de la chaîne pour exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.

Comme
$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = u \cdot \frac{\partial f}{\partial x},$$
on peut en déduire que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + u \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} && \text{(dérivation d'un produit)} \\
&= 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + u \cdot \left\{u \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} && \text{(règle de la chaîne au 1er ordre)} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + u^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

REMARQUE.— Comme d'habitude, il importe d'être bien conscient du sens exact de ce qui est écrit !

$$\forall\, (u, v) \in \Delta, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u, v)\big) + u^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\varphi(u, v)\big)$$

REMARQUE.— Pour ceux que ça intéresse...

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v} &= v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

(On a fait, bien entendu, usage du Théorème de Schwarz.)

► Revenons à l'EDP en f. Comme φ réalise une bijection de Δ sur U, la propriété :

$$\forall\, (x, y) \in U, \quad (2x - y^2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - f(x, y) = 0$$

équivaut à la propriété :

$$\forall\, (u,v) \in \Delta,$$
$$\left\{\underbrace{\left[2x(u, v) - y^2(u, v)\right]}_{=u^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(\varphi(u, v)\big) + \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u, v)\big)\right\} - f\big(\varphi(u, v)\big) = 0$$

qui équivaut elle-même, d'après les calculs de dérivées partielles à la propriété :

$$\forall\, (u, v) \in \Delta, \quad \left\{\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v)\right\} - g(u, v) = 0.$$

► L'EDP précédente est une équation différentielle masquée car on ne dérive ici que par rapport à une seule variable !

▷ Fixons $v_0 \in \mathbb{R}$. La fonction

$$z = [u \mapsto g(u, v_0)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
u & \longmapsto & (u, v_0) & \longmapsto & g(u, v_0)
\end{array}$$

et vérifie l'équation différentielle :

$$\forall\, u > 0, \quad z''(u) - z(u) = 0$$

donc il existe deux constantes réelles $A(v_0)$ et $B(v_0)$ telles que

$$\forall\, u > 0, \quad g(u, v_0) = A(v_0)\,\mathrm{ch}\, u + B(v_0)\,\mathrm{sh}\, u.$$

(Comme on raisonne à $v = v_0$ fixé, les constantes d'intégration dépendent *a priori* de v_0.)

▷ Il existe donc deux fonctions $A, B \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (u,v) \in \Delta, \quad g(u,v) = A(v)\,\mathrm{ch}\, u + B(v)\,\mathrm{sh}\, u.$$

En particulier, comme $1 > 0$ et $2 > 0$,

$$\forall\, v \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g(1,v) = \mathrm{ch}\, 1 \cdot A(v) + \mathrm{sh}\, 1 \cdot B(v) \\ g(2,v) = \mathrm{ch}\, 2 \cdot A(v) + \mathrm{sh}\, 2 \cdot B(v). \end{cases}$$

Le déterminant de ce système (d'inconnues $A(v)$ et $B(v)$) est égal

$$\mathrm{ch}\, 1 \cdot \mathrm{sh}\, 2 - \mathrm{sh}\, 1 \cdot \mathrm{ch}\, 2 = \mathrm{sh}(2-1) \neq 0$$

donc on peut exprimer $A(v)$ et $B(v)$ comme combinaisons linéaires de $g(1,v)$ et $g(2,v)$. Or les deux fonctions

$$\big[v \longmapsto (1,v) \longmapsto g(1,v)\big] \quad \text{et} \quad \big[v \longmapsto (2,v) \longmapsto g(2,v)\big]$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$), donc les deux fonctions A et B sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (en tant que combinaisons linéaires, cette fois).

▷ Réciproquement, quelles que soient les fonctions $A, B \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, la fonction g définie par

$$\forall\, (u,v) \in \Delta, \quad g(u,v) = A(v) \cdot \mathrm{ch}\, u + B(v) \cdot \mathrm{sh}\, u$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Δ car $\mathscr{C}^2(\Delta)$ est stable par produit et par somme et que :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \xrightarrow{\mathscr{C}^\infty} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathscr{C}^\infty} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & u & \longmapsto & \mathrm{ch}\, u \\ (u,v) & \longmapsto & u & \longmapsto & \mathrm{sh}\, u \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \Delta & \xrightarrow{\mathscr{C}^\infty} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathscr{C}^2} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & v & \longmapsto & A(v) \\ (u,v) & \longmapsto & v & \longmapsto & B(v) \end{array}$$

D'autre part, il est clair que la fonction g vérifie l'équation

$$\forall\, (u,v) \in \Delta, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) - g(u,v) = 0.$$

On connaît donc l'ensemble des solutions de cette EDP.

► Le changement de variables φ permet alors de revenir à la fonction f pour conclure : la fonction $f \in \mathscr{C}^2(U)$ est une solution de l'EDP

$$\forall\, (x,y) \in U, \quad (2x - y^2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - f(x,y) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions A et B de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (u,v) \in \Delta, \quad f\big(\varphi(u,v)\big) = g(u,v) = A(v) \cdot \mathrm{ch}\, u + B(v) \cdot \mathrm{sh}\, u$$

c'est-à-dire

$$\forall\, (x,y) \in U, \quad f(x,y) = A(y) \cdot \mathrm{ch}\, \sqrt{2x - y^2} + B(y) \cdot \mathrm{sh}\, \sqrt{2x - y^2}.$$