Calcul différentiel [109]

[109.1, 2]

► Si la fonction $g :]c,d[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la composée

$$f : \begin{array}{ccccc} \Omega & \longrightarrow &]c,d[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & g(y) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et il est clair que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0. \tag{$\star$}$$

► Réciproquement, on suppose que $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ est une solution de ($\star$).

▷ On fixe $c < y_0 < d$. La fonction

$$\begin{array}{ccccc}]a,b[& \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x,y_0) & \longmapsto & f(x,y_0) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'**intervalle** $]a,b[$ et sa dérivée est, par hypothèse, identiquement nulle. Cette fonction est donc constante. La valeur de cette constante dépend *a priori* de la valeur de y_0 qui a été choisie. On conclut donc :

$$\forall\, c < y_0 < d,\ \exists\, K(y_0) \in \mathbb{R},\ \forall\, a < x < b, \quad f(x,y_0) = K(y_0).$$

▷ On a ainsi démontré qu'il existait une fonction $K :]c,d[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = K(y).$$

De plus, si on choisit une valeur arbitraire $a < x_0 < b$, on obtient

$$\forall\, y \in]c,d[, \quad K(y) = f(x_0,y)$$

ce qui prouve que la fonction K est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$:

$$\begin{array}{ccccc}]c,d[& \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & (x_0,y) & \longmapsto & f(x_0,y) \end{array}$$

(par composition).

► Le **[Théorème 109.2]** est ainsi démontré.

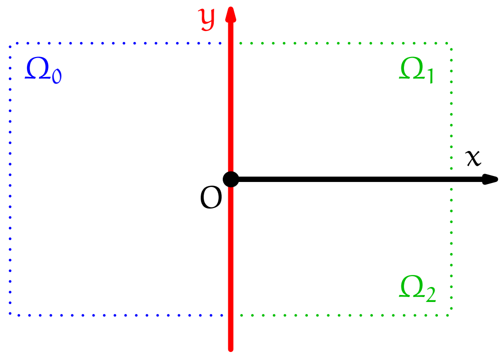
Le contre-exemple suivant montre comment on étudie la régularité d'une fonction de deux variables définies par morceaux. (On suit bien entendu la méthode générale **[56]** *: existence des dérivées partielles, puis continuité des dérivées partielles.)*

[109.3]

On considère la fonction f définie de la manière suivante :

- pour $x < 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,y) = 0$;
- pour $x \geqslant 0$ et $y > 0$, on pose $f(x,y) = x^2$;
- pour $x \geqslant 0$ et $y < 0$, on pose $f(x,y) = -x^2$.

Cette fonction est définie sur l'ouvert Ω obtenu en retirant le demi-axe des abscisses positives de $\mathbb{R}^2$ (en trait épais noir sur la figure).



Le graphe de cette fonction ressemble clairement à la surface qui figure dans le cours.

► L'ouvert Ω sur lequel est définie f se décompose en quatre parties :

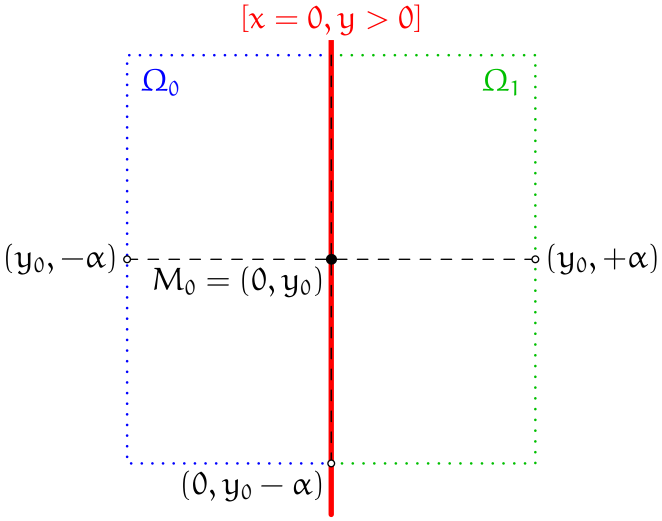
– sur l'ouvert $\Omega_0 =]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$, la fonction f est *constante* et donc $\mathscr{C}^1$;
– sur l'ouvert $\Omega_1 =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, la fonction f est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$;
– de même sur l'ouvert $\Omega_2 =]0, +\infty[\times]-\infty, 0[$;
– les trois morceaux précédents se raccordent le long de l'axe des ordonnées (en trait épais rouge sur la figure) et c'est la régularité de ce raccord que nous allons maintenant étudier.

► Plus précisément, on raccorde les ouverts Ω_0 et Ω_1 le long de la demi-droite ouverte $[x = 0] \cap [y > 0]$; on raccorde les ouverts Ω_0 et Ω_2 le long de la demi-droite ouverte $[x = 0] \cap [y < 0]$. (Il est encore temps de remarquer que nous n'avons pas défini f à l'origine.)

► Par symétrie, nous allons nous borner à étudier l'existence des dérivées partielles en un point $M_0 = (x = 0, y = y_0 > 0)$ et pour cela, nous allons travailler sur le voisinage V_0 de ce point défini par

$$M_0 + \mathbf{h} \in V \quad \iff \quad \|\mathbf{h}\|_\infty < \alpha$$

où le réel $\alpha > 0$ est choisi assez petit pour que $y_0 - \alpha > 0$.



NB : Pour calculer les dérivées partielles, on se déplace parallèlement aux axes de coordonnées, c'est-à-dire **sur les lignes de tirets** de la figure.

▷ Pour $0 < |t| < \alpha$, on pose ici $\mathbf{h} = (t, 0)$, donc $M_0 + \mathbf{h} \in V_0$ et

$$\frac{f(0+t, y_0) - f(0, y_0)}{t - 0} = \frac{f(t, y_0)}{h} = \left| \begin{array}{ll} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{array} \right.$$

et donc

$$\forall\, t \neq 0, \qquad \left| \frac{f(0+t, y_0) - f(0, y_0)}{t - 0} - 0 \right| \leqslant |t|$$

ce qui prouve que f admet une dérivée partielle selon x au point $M_0 = (0, y_0)$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = 0.$$

▷ Pour $0 < |t| < \alpha$, on pose ici $\mathbf{h} = (0, t)$, donc $M_0 + \mathbf{h} \in V_0$ et comme

$$\frac{f(0, y_0 + t) - f(0, y_0)}{t - 0} = 0,$$

la fonction f admet une dérivée partielle selon y au point $M_0 = (0, y_0)$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = 0.$$

► Il reste maintenant à justifier la continuité des deux dérivées partielles en chaque point $M_0 \in [x = 0] \cap [y \neq 0]$. Pour cela, nous allons comparer les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

au point de référence $M_0 \in \Omega$ et en un point $M \in \Omega$ voisin de M_0.

Plus précisément, nous considérerons un point M choisi dans le voisinage V_0 du point M_0 défini plus haut.

▷ Commençons par le cas le plus simple : pour tout $M \in V_0$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$ est nulle. En tant que fonction *constante sur* V_0, cette fonction est en particulier continue au point $M_0 \in V_0$.

▷ L'autre dérivée partielle n'étant pas constante, il va falloir s'employer un peu plus pour étudier son cas !

Considérons un déplacement $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$ avec $|h_x| < \alpha$ et $|h_y| < \alpha$, de telle sorte que $\|\mathbf{h}\|_\infty < \alpha$ et $M = M_0 + \mathbf{h} \in V_0$.

D'après les calculs de dérivées partielles, il faut distinguer deux cas :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(h_x, y_0 + h_y)\right| = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } h_x \leqslant 0, \\ 2h_x & \text{si } h_x > 0. \end{array} \right.$$

Quoi qu'il en soit,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(M_0 + \mathbf{h}) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right| \leqslant 2\|\mathbf{h}\|_\infty$$

ce qui prouve que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est bien continue au point M_0.

► Bien sûr, la même méthode s'applique, avec les mêmes résultats, en un point $M_0 = (0, y_0 < 0)$.

► On a démontré que f admettait des dérivées partielles en chaque point de Ω et que ses dérivées partielles étaient continues en chaque point de Ω, c'est-à-dire **[Thm fondamental 56]** que f était bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

En outre, on a bien vérifié que

$$\forall\, M \in \Omega, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$$

et cependant

$$\forall\, x_0 > 0, \qquad f(x_0, 1) = 1 \neq f(x_0, -1) = -1$$

ce qui prouve que les valeurs prises par $f(x, y)$ ne dépendent *pas que de* x_0 !