Calcul différentiel [110]

[110.1]

► Tout est dans l'analyse du problème ! Il faut ici comprendre que $f(x, y)$ est une fonction **affine** de x et se souvenir que les deux coefficients d'une fonction affine sont déterminés par la donnée de deux points du graphe.

► Soient donc $a < x_1 < x_2 < b$. On sait alors que

$$\forall\, y \in]c, d[, \quad \begin{cases} f(x_1, y) = g(y) + x_1 h(y) \\ f(x_2, y) = g(y) + x_2 h(y) \end{cases}$$

et comme $x_2 - x_1 \neq 0$,

$$\forall\, y \in]c, d[, \quad \begin{cases} h(y) = \dfrac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{x_2 - x_1} & \text{pente} \\[2ex] g(y) = \dfrac{x_2 f(x_1, y) - x_1 f(x_2, y)}{x_2 - x_1}. & \text{ordonnée à l'origine} \end{cases}$$

Ainsi les fonctions g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$ en tant que combinaisons linéaires de $[y \mapsto f(x_1, y)]$ et de $[y \mapsto f(x_2, y)]$, qui sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$.

$$\begin{array}{ccccc}]c, d[& \xrightarrow{\text{polyn.}} & \Omega & \xrightarrow{f \in \mathscr{C}^2(\Omega)} & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & (x_0, y) & \longmapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

[110.2]

► On suppose qu'il existe deux fonctions g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$ et on pose

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = xg(y) + h(y).$$

▷ La fonction $[(x, y) \mapsto x]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω (application linéaire sur $\mathbb{R}^2$). Les fonctions $[(x, y) \mapsto g(y)]$ et $[(x, y) \mapsto h(y)]$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c, d[& \xrightarrow{\varphi \in \mathscr{C}^2(]x, d[)} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \varphi(y) \end{array}$$

Par produit et somme (dans cet ordre), la fonction f est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

REMARQUE.— Il n'y a aucun calcul compliqué ici ! Mais il y a quand même une vraie difficulté théorique : il est crucial de tenir compte que f est une fonction de deux variables (c'est-à-dire une **fonction du couple** (x, y) en fait) et qu'il faut justifier la **régularité de** f **en tant que fonction de deux variables** — *et surtout pas en examinant la régularité selon* x *et selon* y *séparément.*

▷ Cela dit, on vérifie facilement que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(y) \quad \text{et donc que} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0.$$

► Réciproquement, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0.$$

▷ Fixons $y_0 \in]c, d[$. La fonction

$$[x \mapsto f(x, y_0)]$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]a, b[$ comme composée :

$$x \longmapsto (x, y_0) \longmapsto f(x, y_0)$$

et que cette fonction est affine (puisque sa dérivée seconde est identiquement nulle sur un *intervalle*). Il existe donc deux constantes réelles, qui dépendent *a priori* de l'ordonnée y_0 choisie et qu'on note donc $g(y_0)$ et $h(y_0)$, telles que

$$\forall\, x \in]a, b[, \quad f(x, y_0) = xg(y_0) + h(y_0).$$

▷ On a ainsi défini deux fonctions $g, h \,:\,]c, d[\to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = xg(y) + h(y).$$

D'après **[110.1]**, ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$.

[110.3] On applique exactement la même méthode.

► On suppose qu'il existe deux fonctions $g \in \mathscr{C}^2(]a, b[)$ et $h \in \mathscr{C}^2(]c, d[)$ telles que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \qquad f(x, y) = g(x) + h(y).$$

▷ La fonction f ainsi définie est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω, en tant que somme de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]a, b[& \xrightarrow{\mathscr{C}^2} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x & \longmapsto & g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{\text{lin.}} &]c, d[& \xrightarrow{\mathscr{C}^2} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y & \longmapsto & h(y) \end{array}$$

REMARQUE.— On voit une fois de plus sur ce diagramme sagittal (il est farci de *flèches*) qu'il est toujours possible de considérer une fonction d'*une* variable comme s'il s'agissait d'une fonction de *deux* variables...

REMARQUE.— Me pardonnerez-vous l'exigence suivante ? Pour une fonction de *plusieurs variables*, il est vraiment nécessaire de faire un diagramme **sagittal avant de s'en servir**. (Pardon !)

▷ Le calcul des dérivées partielles est sans mystère.

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x) \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial[g'(x)]}{\partial y}(x, y) = 0$$

On peut recommencer pour ceux qui ne font pas confiance au Théorème de Schwarz **[60]**.

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h'(y) \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial[h'(y)]}{\partial x}(x, y) = 0$$

► Réciproquement, supposons que f soit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.$$

▷ Cela signifie que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)(x, y) = 0$$

et d'après **[109]**, il existe une fonction $\eta = \eta(y)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]c, d[$ telle que

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \eta(y).$$

▷ Pour tout $x_0 \in]a, b[$, la fonction $[y \mapsto f(x_0, y)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]c, d[$ (propriété maintenant très classique). D'après le Théorème fondamental du calcul intégral,

$$\begin{aligned} \forall\, (x, y_0) \in \Omega,\ \forall\, y \in]c, d[, \quad f(x, y) &= f(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, z)\, dz \\ &= f(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \eta(z)\, dz \end{aligned}$$

et donc, pour un $c < y_0 < d$ arbitrairement choisi,

$$\forall\, (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) = f(x, y_0) + H_0(y)$$

où H est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c, d[$ en tant que primitive de $\eta \in \mathscr{C}^1(]c, d[)$ et $[x \mapsto f(x, y_0)]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]a, b[$ en tant que composée de $[x \mapsto (x, y_0)]$ par f (qui sont toutes deux de classe $\mathscr{C}^2$).