

On voit ici des calculs assez simples, parce que la situation physique est elle-même très simple : on sait, grâce à une propriété de symétrie, que les quantités étudiées de dépendent du vecteur position $(x_1, \dots, x_n)$ que par l'intermédiaire d'une fonction $u(u_1, \dots, u_n)$ — par exemple que les quantités sont radiales et sont donc représentées mathématiquement par $g(r)$.

C'est bien d'une composition de fonctions qu'il s'agit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (g \circ u)(x_1, \dots, x_n).$$

Mais ce n'est pas d'un changement de variables (on n'a pas le même nombre de paramètres pour calculer f et g), c'est beaucoup plus simple.

Et maintenant... place à la règle de la chaîne !

★

[83.1] ► Comme g et u sont de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction composée $f = g \circ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{u=u(x_1, \dots, x_n)} \mathbb{R} \xrightarrow{g=g(u)} \mathbb{R}$$

► On suppose que l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne canonique, pour laquelle la base canonique est une base orthonormée. Dans cette base, les coordonnées du gradient de u sont égales à **[31.4]**

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

et comme cette base est orthonormée

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2.$$

► D'après la règle de la chaîne,

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

(Comme g est une fonction d'une seule variable, on peut remplacer les ∂ par des d .)

Pour calculer la dérivée partielle seconde, on applique la formule précédente à elle-même. Pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dg}{du} \right) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(dérivée d'un produit)} \\ &= \left[\frac{d}{du} \left(\frac{dg}{du} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} && \text{(Fle du 1er ordre)} \\ &= \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \end{aligned}$$

et en sommant sur $1 \leq k \leq n$:

$$\Delta f = \frac{d^2 g}{du^2} \cdot \|\nabla u\|^2 + \frac{dg}{du} \cdot \Delta u.$$

REMARQUE.— Cette égalité doit être comprise comme une égalité entre fonctions des variables $x_1, \dots, x_n$ (car f et u sont des fonctions de $x_1, \dots, x_n$). On peut alourdir la formule pour la rendre plus explicite :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta f(\mathbf{x}) = g''(u(\mathbf{x})) \cdot \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2 + g'(u(\mathbf{x})) \cdot \Delta u(\mathbf{x})$$

en notant $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pour que la formule reste lisible !

[83.2]

► On rappelle l'astuce usuelle du calcul radial. Comme $u^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, alors

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_k} = 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} = 2x_k \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{x_k}{u}.$$

On en déduit en particulier que

$$\|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{u^2} = \frac{u^2}{u^2} = 1.$$

(On calcule ici dans la base canonique, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.)

► Pour tout $1 \leq k \leq n$, on peut dériver cette expression comme un *produit* de deux fonctions de x_k :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial x_k}{\partial x_k} \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{\partial [1/u]}{\partial x_k} \quad (\text{dérivée du produit})$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{u} + x_k \cdot \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (\text{dérivée de l'inverse})$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}.$$

(On rappelle que u est une fonction de $x_1, \dots, x_n$.)

► En sommant sur $1 \leq k \leq n$, on obtient

$$\Delta u = \frac{n}{u} - \frac{1}{u^3} \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 = \frac{n}{u} - \frac{u^2}{u^3} = \frac{n-1}{u}.$$

► D'après la relation générale établie au [83.1],

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \Delta f(\mathbf{x}) = g''(u(\mathbf{x})) \cdot 1 + g'(u(\mathbf{x})) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})}.$$

► La fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, si

$$\forall r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0,$$

alors en particulier

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad g''(u(\mathbf{x})) \cdot 1 + g'(u(\mathbf{x})) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})} = 0$$

et $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$.

► Réciproquement, la fonction $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est clairement surjective sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, pour tout $r > 0$, il existe (au moins) un $\mathbf{x} \in \Omega$ tel que $r = u(\mathbf{x})$ et si $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, alors

$$\forall r > 0, \exists \mathbf{x} \in \Omega, \quad \begin{cases} r = u(\mathbf{x}) \\ g''(u(\mathbf{x})) \cdot 1 + g'(u(\mathbf{x})) \cdot \frac{n-1}{u(\mathbf{x})} = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\forall r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

REMARQUE.— Une fois de plus, j'ai détaillé exagérément les calculs pour distinguer les deux moments de l'équivalence et en particulier mettre en valeur la propriété de **surjectivité** de la fonction u , qui est essentielle pour conclure ici.

► Soit f , une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique radiale sur Ω . On **admet** qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad f(\mathbf{x}) = g(u(\mathbf{x})).$$

(Ceux qui refusent d'admettre une telle propriété n'auront qu'à la prendre pour *définition* des fonctions harmoniques radiales.)

▷ D'après la question précédente, cette fonction g est une solution de l'équation différentielle

$$\forall r > 0, \quad g''(r) + \frac{n-1}{r} \cdot g'(r) = 0.$$

On remarque qu'il s'agit ici d'une équation différentielle linéaire, homogène, du premier ordre en $g'(r)$. On en déduit qu'il existe une constante K telle que

$$\forall r > 0, \quad g'(r) = \frac{K}{r^{n-1}}$$

et donc qu'il existe deux constantes $a = \frac{K}{2-n}$ et b telles que

$$\forall r > 0, \quad g(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b$$

et donc telles que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad f(\mathbf{x}) = \frac{a}{\|\mathbf{x}\|^{n-2}} + b.$$

REMARQUE.— En particulier, si une fonction harmonique et radiale est bornée sur Ω , alors $a = 0$ et cette fonction est nécessairement *constante*.