MPSI 2 - Semaine 21

A. Soit E, un espace vectoriel de dimension n.

A - 1. Que dire du cardinal d'une famille libre de vecteurs de E ?

Le cardinal d'une famille libre de vecteurs de E est inférieur ou égal à $\dim E$.

A - 2. Soit $1 \leqslant r \leqslant n$. Existe-t-il une famille libre de vecteurs de E dont le cardinal soit égal à r ?

Comme E est un espace de dimension finie, on sait *qu'il admet une base et que le cardinal de cette base est égal à* $\dim E$. *On peut donc noter*

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

cette base.

On sait *que toute sous-famille d'une famille libre est libre elle aussi. Donc, quel que soit $1 \leqslant r \leqslant n$, la famille*

$$(e_1, \dots, e_r)$$

est une famille libre de cardinal r.

A - 3. CNS pour que la famille (x_1) soit libre ?

*Une famille constituée d'*un seul *vecteur x_1 est libre si, et seulement si, le vecteur x_1 est non nul.*

A - 4. CNS pour que la famille (x_1, x_2) soit libre ?

Une famille constitué de deux *vecteurs est libre si, et seulement si, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels.*

A - 5. On suppose que (x_1, x_2) est liée. Existe-t-il un scalaire α tel que $x_2 = \alpha \cdot x_1$?

Si $x_1 = 0_E$ et si $x_2 = \alpha \cdot x_1$, alors il faudrait que $x_2 = 0_E$ également !

❧ *En revanche, on suppose que $x_1 \neq 0_E$ et qu'il existe deux scalaires $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tels que*

$$\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 = 0_E.$$

Si $\mu = 0$, alors $\mu \cdot x_2 = 0_E$, donc $\lambda \cdot x_1 = 0_E$ et comme $x_1 \neq 0_E$, alors $\lambda = 0$. C'est impossible puisqu'on a supposé que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Et comme $\mu \neq 0$, alors

$$x_2 = \frac{-\lambda}{\mu} \cdot x_1.$$

⋆

B. Soient $f \in L(E)$ et $\mathscr{B} = (e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, une base de E. Démontrer que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Par définition, $f(\dots) \in \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \operatorname{Im} f$.

Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe une (unique) famille de scalaires $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot e_k.$$

Par linéarité de f*,*

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot f(e_k) \in \text{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

On conclut par double inclusion.

$\star$

C. On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^4$.

$$u_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad u_2 = (0, 1, 0, 1)$$
$$u_3 = (1, 0, -1, 0) \qquad u_4 = (a, b, c, d)$$

C - 1. Quelle est la dimension de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$?

On traduit la relation $a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 = 0$ *par un système de quatre équations (une par coordonnée) et trois inconnues* (a_1*,* a_2*,* a_3*). Comme la seule solution de ce système est*

$$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0),$$

on en déduit que (u_1, u_2, u_3) *est une famille libre.*
Le sous-espace F *est (par définition) engendré par une famille libre de trois vecteurs, donc* $\dim F = 3$*.*

C - 2. CNS pour que $u_4 \in F$?
Le vecteur u_4 *appartient à* F *si, et seulement si, il existe trois scalaires* a_1*,* a_2*,* a_3 *tels que*

$$u_4 = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3.$$

On résout ce système de quatre équations (une par coordonnée) en quatre inconnues (a*,* b*,* c *et* d*) et on trouve une unique condition de compatibilité :* $b - d = 0$*.*
Par conséquent, $u_4 \in F$ *si, et seulement si,* $b = d$*.*

C - 3. CNS pour que (u_1, u_2, u_3, u_4) soit une famille libre ?
Comme (u_1, u_2, u_3) *est libre, on* sait *que la famille* (u_1, u_2, u_3, u_4) *est liée si, et seulement si,*

$$u_4 \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = F.$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) *est libre si, et seulement si,* $b \neq d$*.*

$\star$

D. Soit $f \in L(E)$. On suppose connu un sous-espace G tel que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus G.$$

Démontrer que : pour tout $y \in \operatorname{Im} f$, il existe au moins un $x \in G$ tel que $f(x) = y$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f$*. Par définition, il existe au moins un* $x_0 \in E$ *tel que* $f(x_0) = y$*.*
Par définition des sous-espaces supplémentaires, il existe un (unique) couple

$$(x_1, x) \in \operatorname{Ker} f \times G$$

tel que

$$x_0 = x_1 + x.$$

Par linéarité de f*,*

$$y = f(x_0) = \underbrace{f(x_1)}_{=0_E} + f(x) = f(x)$$

puisque $x_1 \in \operatorname{Ker} f$.

⋆

E.

E - 1. Démontrer que : Si la famille

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est libre, alors la famille

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

est libre elle aussi.
On suppose qu'il existe une famille de scalaires

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

telle que

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot x_k = 0_E.$$

On en déduit qu'il existe une famille de scalaires

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0)$$

telle que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot x_k + \underbrace{a_n \cdot x_n}_{=0_E} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot x_k = 0_E.$$

Or la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est supposée libre, donc

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$$

ce qui prouve que la sous-famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ est libre.

E - 2. CNS sur le vecteur x_{n+1} pour que la famille

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$$

soit libre ?
***NB.** Il est souvent plus facile de raisonner sur une famille liée (**il existe** une relation de liaison...) que sur une famille libre (**il n'existe pas** de relation de liaison...). Illustration concrète !*
❧ *Si $x_{n+1} \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ est évidemment liée.*
❧ *Réciproquement, si la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ est liée, alors il existe une famille de scalaires*

$$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \neq (0, \dots, 0, 0) \qquad (\star)$$

telle que

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot x_k = 0_E.$$

Si $a_{n+1} = 0$, alors il reste la relation de liaison :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k = 0_E$$

et donc $a_1 = \dots = a_n = 0$ (famille libre !), ce qui contredit l'hypothèse $(\star)$.

Donc $a_{n+1} \neq 0$ et

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k}{a_{n+1}} \cdot u_k \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

On contrapose pour conclure ! Si la famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre, alors : la famille augmentée $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ est libre si, et seulement si, x_{n+1} n'appartient pas au sous-espace engendré par x_1, ..., x_n.

⋆

F. Soit $f \in L(E)$.

F - 1. On suppose que la famille

$$\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$$

est libre. Démontrer que la famille

$$(e_1, \dots, e_n)$$

est libre.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1 \cdot e_1 + \cdots + a_n \cdot e_n = 0_E$. Par linéarité de f,

$$0_E = f(0_E) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot f(e_k). \tag{$\star$}$$

Or la famille $\big(f(e_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est supposée libre, donc la relation de liaison $(\star)$ est triviale, c'est-à-dire

$$a_1 = \cdots = a_n = 0$$

et cela prouve que la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.

F - 2. Étudier la réciproque.

Si $f \in L(E)$ est injective, on sait *que l'image d'une famille libre par f est encore une famille libre.*
En revanche, si $f \in L(E)$ n'est pas injective :

- *il est* possible *que l'image d'une famille libre par f soit une famille liée ;*
- *il existe* au moins une *famille libre dont l'image par f est liée ;*
- *à moins que $f = \omega_E$, il existe* au moins une *famille libre dont l'image par f est encore libre.*

⋆

G. Soit $\varphi \in L(E)$. On suppose connus deux sous-espaces vectoriels F et G tels que $E = F \oplus G$ et que les restrictions de φ à F et à G sont toutes les deux injectives. L'application φ est-elle injective ?

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. D'après la décomposition en somme directe, il existe deux vecteurs $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que $x_F + x_G = x$. Par linéarité de φ, on en déduit que

$$\varphi(x_F) + \varphi(x_G) = 0_E \quad \textit{et donc que} \quad \underbrace{\varphi(x_F)}_{\in\varphi(F)} = \underbrace{\varphi(-x_G)}_{\in\varphi(G)}.$$

❧ *Si $\varphi(F) \cap \varphi(G) = \{0_E\}$, alors*

$$\begin{cases} x_F \in F \\ \varphi(x_F) = 0_E \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} x_G \in G \\ \varphi(x_G) = 0_E \end{cases}$$

et par injectivité des deux restrictions, on en déduit que $x_F = x_G = 0_E$ et donc que $x = 0_E$.
❧ *Réciproquement, considérons $E = \mathbb{R}^2$, $F = (Ox)$, $G = (Oy)$ et soit p, la projection orthogonale sur la droite $[y = x]$. Il est clair que les*

axes F et G sont supplémentaires dans E, que les restrictions de p aux sous-espaces vectoriels F et G sont toutes les deux injectives et pourtant p n'est pas injective.
Explication : le noyau de p est la droite $[y = -x]$ et son intersection avec F ou G est réduite au vecteur nul.

Conclusion : Sous les hypothèses de l'énoncé, l'application φ n'est pas forcément injective.

⋆

H. On suppose que les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.

H - 1. Donner deux caractérisations possibles de l'hypothèse qui est faite : l'une sera formulée en termes de *vecteurs*, l'autre fera appel à la notion de *dimension*.

1. *Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un, et un seul, couple $(y, z) \in F \times G$ tel que*

$$x = y + z.$$

2. *Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si, $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.*

NB. *Bien entendu, la seconde caractérisation n'a pas de sens si E est un espace de dimension infinie.*

H - 2. Si $\dim E = 3$ et $\dim F = 2$, que dire de G ?

Si F et G sont supplémentaires dans un espace E de dimension finie, alors on sait *que*

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

donc, ici, $\dim G = 1$.

⋆

I. Comment démontrer que trois sous-espaces F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe dans E ?

Les sous-espaces F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe si, et seulement si, l'équation

$$\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} + \underbrace{x_3}_{\in F_3} = 0_E$$

admet $(x_1, x_2, x_3) = (0_E, 0_E, 0_E)$ pour seule solution.

⋆

J. Comment caractériser une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$? de $\mathbb{R}^3$? (NB : on attend au moins deux réponses à chaque fois.)

Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ est caractérisée par un vecteur directeur (non nul par définition), quel que soit $n \geqslant 1$.

$$D = \mathrm{Vect}(u) = \mathbb{R} \cdot u$$

Dans $\mathbb{R}^2$, une droite est caractérisée par une *équation cartésienne.*

$$D = [ax + by = 0] \qquad \text{où} \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

Dans $\mathbb{R}^3$, une droite (= intersection de deux [hyper]plans) est caractérisée par deux *équations cartésiennes non proportionnelles.*

$$D = [a_1x + b_1y + c_1z = 0] \cap [a_2x + b_2y + c_2z = 0]$$

⋆

K. Soit $f \in L(E)$. On suppose connu un sous-espace

G tel que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus G.$$

Démontrer que la restriction de f à G est injective.

Comme $f \in L(E)$, sa restriction à G est aussi linéaire et on va étudier l'injectivité au moyen du noyau de f.

Soit $x \in G$ tel que $f(x) = 0_E$. Alors $x \in G \cap \operatorname{Ker} f$ et comme les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et G sont supplémentaires, leur intersection est réduite au vecteur nul. Donc $x = 0_E$, de qui prouve que la restriction de f à G est injective.