Recherches d'extrema [26]

Recherche d'un minimum au moyen d'une fonction convexe.

$\star$

► La fonction φ est une fonction rationnelle et son dénominateur ne s'annule en aucun point de

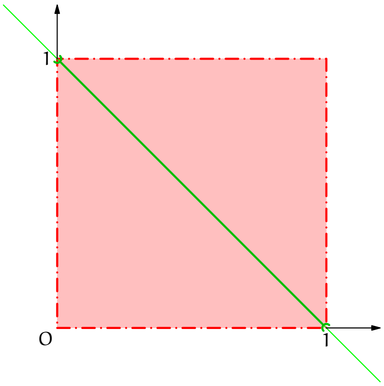
$$\Omega =]0,1[^n \cap [x_1 + \cdots + x_n = 1].$$

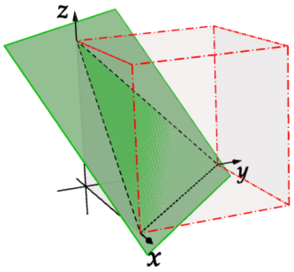
La fonction φ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω.

► Quelle est la nature géométrique de Ω ?

En dimension $n = 2$, c'est l'intersection du carré ouvert $]0,1[\times]0,1[$ avec la droite affine d'équation $[x+y=1]$, c'est donc un intervalle ouvert et borné.

En dimension $n = 3$, c'est l'intersection du cube ouvert $]0,1[^3$ avec le plan affine d'équation $[x+y+z=1]$, c'est donc un triangle ouvert.





► Étudions maintenant la nature topologique de Ω.

▷ Étant contenu dans un (hyper)cube, Ω est une partie bornée.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le point

$$M_p = \left(\frac{1}{p}, \frac{2}{n} - \frac{1}{p}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

appartient à Ω (toutes ses coordonnées sont strictement comprises entre 0 et 1 ; leur somme est égale à 1). Si p tend vers $+\infty$, le point M_P tend vers le point limite

$$M_\infty = \left(0, \frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

qui n'appartient plus à Ω : la première coordonnée est nulle ! Ainsi, Ω n'est pas stable par passage à la limite, donc **[Chap.21 - 4.1]** pas fermée et donc **[Chap.21 - 4.2]** pas compacte.

On ne peut donc pas appliquer le **[Thm 4.5]**, qui nous garantirait l'existence d'un minimum.

▷ La partie Ω n'est pas ouverte non plus ! On procède par l'absurde : supposons que Ω soit ouverte pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Il existerait donc un rayon $r > 0$ tel que la boule B_r de centre

$$M_1 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \in \Omega$$

et de rayon $r > 0$ soit tout entière contenue dans Ω. Or la distance du point M_0 au point

$$M = \left(\frac{1}{n} + \frac{r}{2}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

est égale à $r/2$, donc le point M appartient à la boule B_r sans appartenir à Ω (la somme des coordonnées n'est pas égale à 1).

C'est absurde, donc Ω n'est pas ouverte pour la norme produit, ni pour aucune autre norme **[Chap.20 - 4]**.

On ne peut donc pas appliquer non plus le **[Thm 10.2]** qui nous guiderait pour trouver l'endroit où un minimum pourrait être atteint.

Mézalor que faire ?

► Vu la tête de φ, on pose

$$\forall\, x \in \,]0,1[\,, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0,1[$ et que

$$\forall\, x \in \,]0,1[\,, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} > 0,$$

donc f est convexe sur $]0,1[$.

► Par conséquent, d'après **[Chap.1 - 11.3]**,

$$\forall\, 0 < x_1, \dots, x_n < 1, \qquad \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geqslant f\Big(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k\Big)$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall\, (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ &\geqslant n \cdot f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \varphi\Big(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\Big) \end{aligned}$$

Cette inégalité démontre que φ atteint son minimum absolu au point $M_1 \in \Omega$ et ce minimum est égal à ${}^{n^2}\!/_{n-1}$.

REMARQUE.— Comme φ est strictement convexe, on sait même qu'il s'agit d'un minimum strict : φ n'atteint son minimum qu'en ce seul point. (Toutes ces précisions sont hors programme.)