Topologie d'un EVN [9]

Fouiller dans ses connaissances pour y mettre de l'ordre...

$\star$

[9.1]

► On considère le cercle $\mathscr{C}_0$ de centre $M_0 = (x_0, y_0)$ et de rayon $r > 0$ (pour la norme euclidienne canonique). Ce cercle est défini par la relation :

$$\|\mathbf{M_0 M}\| = r.$$

L'équation canonique de ce cercle s'en déduit :

$$\mathscr{C}_0 = \big[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\big] \tag{1}$$

et un changement d'échelle nous ramène au cercle unité :

$$\Big(\frac{x - x_0}{r}\Big)^2 + \Big(\frac{y - y_0}{r}\Big)^2 = 1.$$

▷ D'après le Théorème de relèvement (MPSI), quel que soit le point

$$M = (x, y) \in \mathscr{C}_0,$$

il existe un, et un seul, angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\frac{x - x_0}{r} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \frac{y - y_0}{r} = \sin\theta.$$

▷ Réciproquement, quel que soit $\theta \in [0, 2\pi]$, le point

$$M(\theta) = \big(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta\big)$$

vérifie l'équation (1).

▷ On a prouvé (par double inclusion) que le cercle $\mathscr{C}_0$ était l'image du segment $[0, 2\pi]$ par l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & \big(x(\theta), y(\theta)\big) = (x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta). \end{array}$$

▷ On a ainsi réalisé un **paramétrage** du cercle $\mathscr{C}_0$ (surjectif, mais pas injectif puisque $f(0) = f(2\pi)$). Très utile si on souhaite remplacer un compas fatigué par un ordinateur.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tracer_cercle(centre, rayon):
    x0, y0 = centre
    th = np.linspace(0, 2*np.pi)
    x = x0 + rayon*np.cos(th)
    y = y0 + rayon*np.sin(th)
    image, repere = plt.subplots()
    repere.set_aspect('equal')      # repère orthonormé
    repere.plot(x, y)
```

► On considère pour commencer le carré $ABCD$ avec

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (1, 1), \quad D = (0, 1).$$

Chaque côté est un segment de droite qui peut être parcouru à vitesse constante. On peut donc commencer par parcourir le côté AB :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad M(t) = (t, 0)$$

puis le côté BC en remarquant que $(t-1) \in [0,1]$ pour $t \in [1,2]$:

$$\forall\, t \in [1,2], \quad M(t) = \big(1, (t-1)\big)$$

ensuite le côté CD sachant que $(t-2) \in [0,1]$ pour $t \in [2,3]$:

$$\forall\, t \in [2,3], \quad M(t) = \big(1-(t-2), 1\big) = (3-t, 1)$$

(les abscisses sont des fonctions *décroissantes* du temps) et enfin le côté DA :

$$\forall\, t \in [3,4], \quad M(t) = \big(0, 1-(t-3)\big) = (0, 4-t)$$

(cette fois, ce sont les ordonnées qui sont des fonctions décroissantes du temps).

On a ainsi paramétré le carré $ABCD$ au moyen d'une fonction $M : [0,4] \to \mathbb{R}^2$, affine par morceaux (avec 4 morceaux).

► Plus généralement, puisqu'un carré est constitué de quatre segments, on peut paramétrer n'importe quel carré en sachant paramétrer un segment. Rouvrons le cours sur la convexité (chap.1) et posons :

$$\begin{aligned}
&\forall\, t \in [0,1], && M(t) = (1-t)\cdot A + t\cdot B \\
&\forall\, t \in [1,2], && M(t) = [1-(t-1)]\cdot B + (t-1)\cdot C && ((t-1) \text{ parcourt } [0,1]) \\
&\forall\, t \in [2,3], && M(t) = [1-(t-2)]\cdot C + (t-2)\cdot D && ((t-2) \text{ parcourt } [0,1]) \\
&\forall\, t \in [3,4], && M(t) = [1-(t-3)]\cdot D + (t-3)\cdot A. && ((t-3) \text{ parcourt } [0,1])
\end{aligned}$$

On profite de l'ordinateur allumé pour vérifier.

```
def tracer_quadrilatere(A, B, C, D):
    image, repere = plt.subplots()
    repere.set_aspect('equal')
    t = np.linspace(0, 1)
    for (M, P) in zip([A,B,C,D], [B,C,D,A]):
        x = (1-t)*M[0] + t*P[0]
        y = (1-t)*M[1] + t*P[1]
        plt.plot(x, y, 'r')
```

(Si vous ne voyez rien, c'est que votre carré est confondu avec le bord de la fenêtre. Modifiez la fenêtre avec `xlim` et `ylim`.)

[9.2]

Cf le gif animé du cahier de prépa.

[9.3]

► On *doit* savoir que

$$M \in SO_2(\mathbb{R}) \quad \iff \quad \exists\, \theta \in \mathbb{R}, \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est l'image directe du segment $[0, 2\pi]$ par l'application 2π périodique définie par :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad f(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$