

Recherches d'extrema [8.5]

Pour justifier l'existence d'un extremum sur une partie qui n'est pas compacte, on peut quand même recourir à un argument de compacité.

*

► La partie A sur laquelle la fonction f est définie est un rectangle infini :

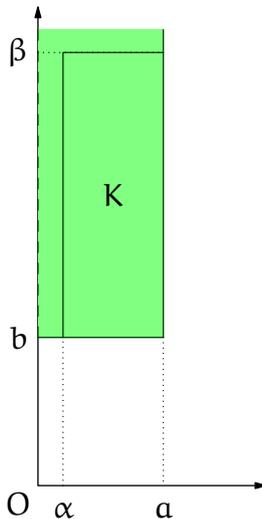
$$A = [0 < x \leq a] \cap [b \leq y] =]0, a] \times [b, +\infty[.$$

La partie A n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2 : le point (a, b) appartient à A mais visiblement A n'est pas un voisinage de ce point.

La partie A n'est pas fermée non plus : la suite de terme général

$$M_n = \left(\frac{a}{n}, b \right)$$

est constituée de points de A , elle converge vers le point $M_\infty = (0, b)$, mais ce point n'appartient pas à A , donc A n'est pas stable par passage à la limite [4.1].



► La fonction f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur A (ni x , ni y ne s'annulent sur A), donc f est continue sur A .

► Pour $0 < \alpha < a$ et $\beta > b$, on peut définir une partie compacte

$$K = [\alpha, a] \times [b, \beta] \subset A.$$

(Il est clair que K est à la fois fermée et bornée [4.2].)

Sur ce compact, la fonction continue f atteint [4.5] un maximum $f(P_0)$ et un minimum $f(P_1)$ (avec bien sûr $P_0 \in K$ et $P_1 \in K$).

Pour le moment, on peut choisir librement α et β . Il nous reste à voir comment *bien* les choisir.

► Soit $P = (x, y) \in A$, un point situé en dehors du compact K : on distingue deux cas.

– Ou bien $y > \beta$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x + y)^2 \geq y^2 > \beta y > 0 \\ 0 < xy \leq ay, \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(x, y) \geq \frac{\beta}{a}.$$

– Ou bien $y \leq \beta$ et $0 < x < \alpha$ et, dans ce cas,

$$\begin{cases} (x + y)^2 \geq y^2 \geq b^2 \\ 0 < xy < \beta x, \end{cases} \quad \text{donc} \quad f(x, y) \geq \frac{b^2}{\beta x} \geq \frac{b^2}{\alpha \beta}.$$

► Comme $(a, b) \in A$, nous allons enfin prendre $f(a, b)$ comme valeur de référence.

On peut choisir β assez grand pour que

$$\frac{\beta}{a} \geq f(a, b)$$

et, maintenant que β est fixé, on peut choisir α assez proche de 0 pour que

$$\frac{b^2}{\alpha\beta} \geq f(a, b).$$

Pour un tel couple (α, β) , on a démontré ci-dessus qu'il existait un point $P_1 \in K \subset A$ tel que

$$\forall M \in K, \quad f(M) \geq f(P_1)$$

et en particulier tel que $f(a, b) \geq f(P_1)$ (puisque $(a, b) \in K$). On a également démontré que

$$\forall M \in A \setminus K, \quad f(M) \geq f(a, b) \geq f(P_1).$$

Par conséquent, on a bien démontré que

$$\forall M \in A, \quad f(M) \geq f(P_1)$$

c'est-à-dire que f atteint une valeur minimale sur A (égale à $f(P_1)$).

REMARQUE.— Et $f(P_1)$? Cette valeur maximale sur K est sans intérêt ! Lorsque x tend vers 0, la valeur de $f(x, b)$ tend vers $+\infty$, donc f n'est pas majorée sur A .

Bon : nous avons prouvé que f atteignait un minimum sur A . Allons-nous en rester là ? Ou au moins essayer de calculer la valeur de ce minimum ?

► **Première méthode.**

Il n'y a que deux possibilités : ou bien f atteint son minimum à l'intérieur de A , c'est-à-dire sur l'ouvert

$$A^\circ =]0, a[\times]b, +\infty[,$$

ou bien f atteint son minimum sur le bord de A , c'est-à-dire sur l'un des deux intervalles suivants :

$$H = \{(x, b), 0 < x \leq a\}, \quad V = \{(a, y), b \leq y\}.$$

► Si f atteint son minimum en un point P_1 de l'ouvert A° , alors [10.2] le point P_1 est un point critique de f . Or

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x-y)(x+y)}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-x)(x+y)}{x y^2},$$

donc les points critiques de f sont les points de la médiatrice $[y = x]$.

Seulement voilà : la médiatrice ne rencontre pas A° ! En effet, si $(x, y) \in A^\circ$, alors $x < a \leq b < y$, donc $x < y$.

La fonction f n'a donc aucun point critique sur l'ouvert A° et, faute de point critique, elle n'atteint pas son minimum sur A° .

► La fonction f atteint donc son minimum sur l'intervalle horizontal H ou sur l'intervalle vertical V .

Pour tout $(x, y) \in H$, on a

$$0 < x \leq a \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(x, b) = \frac{x}{b} + 2 + \frac{b}{x}.$$

Une étude de fonction montre que le second membre est décroissant sur $]0, b]$ et croissant sur $[b, +\infty[$. Or $x \in]0, a] \subset]0, b]$, donc

$$\min_{(x,y) \in H} f(x, y) = f(a, b).$$

De même, pour tout $(x, y) \in V$, on a

$$b \leq y \quad \text{et} \quad f(x, y) = f(a, y) = \frac{a}{y} + 2 + \frac{y}{a}.$$

C'est la même chose ! Et comme $y \in [b, +\infty[\subset [a, +\infty[$, on en déduit que

$$\min_{(x,y) \in V} f(x, y) = f(a, b).$$

Conclusion : On connaît la valeur minimale de f

$$\min_{(x,y) \in A} f(x, y) = f(a, b)$$

et le raisonnement précédent nous assure aussi que cette valeur n'est atteinte qu'au seul point (a, b) (*minimum global strict*).

► **Deuxième méthode.**

On peut aussi appliquer la méthode des crêtes puisque f est définie sur un rectangle.

▷ On fixe $0 < x_0 \leq a$ et on étudie les variations de la fonction

$$\left[y \mapsto f(x_0, y) = \frac{x_0}{y} + 2 + \frac{y}{x_0} \right]$$

sur l'intervalle $[b, +\infty[$. C'est déjà fait ! Comme

$$y \in [b, +\infty[\subset [x_0, +\infty[,$$

on sait que

$$\forall 0 < x_0 \leq a, \quad \min_{y \geq b} f(x_0, y) = f(x_0, b).$$

▷ Il reste à étudier les variations de

$$[x \mapsto f(x, b)]$$

sur l'intervalle $]0, a]$ et c'est déjà fait. Comme

$$x \in]0, a] \subset]0, b],$$

on sait que

$$\min_{0 < x \leq a} f(x, b) = f(a, b).$$

Par conséquent,

$$\min_{(x,y) \in A} f(x, y) = \min_{0 < x \leq a} \left[\min_{y \geq b} f(x, y) \right] = f(a, b).$$