Cercles et sphères

Dans un espace vectoriel normé, les cercles (en dimension 2) et les sphères (en dimension $\geqslant 3$) sont définis par une même relation :

$$[\|\mathbf{AM}\| = r]$$

où le point A est le **centre** et le réel $r \geqslant 0$ est le **rayon**.

Equations cartésiennes dans un espace euclidien

- Si E est un espace euclidien et qu'on a choisi une **base orthonormée** $\mathscr{B}$ de E,

$$\|\mathbf{AM}\|^2 = r^2 \qquad \iff \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 = r^2$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ et $(a_1, \dots, a_n)$ sont les coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$ de A et M respectivement.
- En dimension 2 ou 3, l'équation est souvent donnée sous forme développée.

$$\underbrace{x^2 + y^2} + \underbrace{2a_x x + 2a_y y} = \underbrace{r^2 - a_x^2 - a_y^2} \qquad \underbrace{x^2 + y^2 + z^2} + \underbrace{2a_x x + 2a_y y + 2a_z z} = \underbrace{r^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2}$$

Il faut analyser ces équations en trois composantes pour reconnaître l'équation d'un cercle :

1. la somme des carrés des coordonnées ;
2. une expression linéaire en fonction des coordonnées ;
3. un terme constant.

Les équations de cercles/sphères ont la **même forme générale dans toutes les bases orthonormées** de E.

EXERCICE.— Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui ont la *forme* d'une équation de cercle ou de sphère dans une base orthonormée ?

1.	$x^2 + y^2 + 3x - 1 = 0$	**2.**	$x^2 - y^2 + 2x + 4y = 5$	**3.**	$x^3 + y^2 + x - y = 8$
4.	$2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y = 5$	**5.**	$x^2 + y^2 + 3xy + 2x - 6y = 0$	**6.**	$x^2 + 2y^2 + 4x + 5y - 8 = 0$
7.	$x^2 + y^2 + 7x + 5y = 8$	**8.**	$3x^2 + 3y^2 - 8x + 7y = 12$	**9.**	$x^2 + 8x - 6y + 1 = 0$

Analyse d'une équation cartésienne

Certaines équations ont la forme générale d'une équation de cercle/sphère sans pour autant représenter un cercle ou une sphère. Avant de conclure, il faut savoir analyser une telle équation.

- La méthode est très simple :

1. on oublie provisoirement le terme constant ;
2. on sépare les variables pour faire apparaître des polynômes de degré 2 ;
3. on écrit ces polynômes sous forme canonique ;
4. on réintroduit le terme constant dans les calculs et on conclut !

- Considérons les équations suivantes.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 12 = 0$$

En suivant la méthode indiquée, on trouve d'abord

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = (x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = [(x-3)^2 - 9] + [(y+1)^2 - 1] = (x-3)^2 + (y+1)^2 - 10$$

donc

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 &\iff (x-3)^2 + (y+1)^2 = 10 - 6 = 2^2 && \text{(cercle de rayon 2)}\\
x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0 &\iff (x-3)^2 + (y+1)^2 = 10 - 10 = 0 && \text{(un point)}\\
x^2 + y^2 - 6x + 2y + 12 = 0 &\iff (x-3)^2 + (y+1)^2 = 10 - 12 < 0 && \text{(rien !)}
\end{aligned}$$

- Si l'équation du cercle est de la forme $f(x, y) = 0$, alors le centre du cercle est l'**unique point critique** de f.
- Pour les sphères, la méthode est la même, la pratique est 50% plus longue (3 variables au lieu de 2).