MPSI 1 - Semaine 21
Algèbre linéaire et calcul matriciel

1 Construction des exercices

1.1 Matrices de passage

Les matrices à étudier ne sont pas définies au hasard : on part de matrices simples (pour lesquelles le rang, le noyau et de l'image sont évidents) et on les complique en appliquant la formule de changement de base. Pour cela, il faut choisir des matrices de passage "raisonnables" afin que les calculs (menés à la main...) ne soient pas affreux.

```
import numpy as np
P = np.matrix([[1,2,-1],[1,2,-2],[1,1,1]])
Q = np.matrix([[2,2,1],[-2,1,3],[3,1,-1]])
# l'inverse d'une matrice inversible est
# aussi une matrice inversible !
P2, Q2 = P**(-1), Q**(-1)
```

On vérifie que les matrices ont été bien choisies : non seulement elles sont inversibles, mais leurs inverses respectives sont également des matrices à coefficients entiers "pas trop grands".

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 7 & -5 & -8 \\ -5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1.2 Matrices de référence

On choisit maintenant les matrices de référence (= celles qui sont si simples à étudier).
On notera systématiquement φ, l'endomorphisme canoniquement associé à chacune de ces matrices.

```
A=np.diag([1,-2,0])
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'image par φ du 3-ième vecteur de base est nulle, donc la matrice A n'est *pas inversible*.
Son *rang* est égal à 2 : les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles (donc rang $\geqslant 2$) et la troisième est nulle (donc rang < 3).

Son *image* est le plan engendré par les deux premières colonnes (la troisième ne servant à rien).
Son *noyau* est la droite dirigée par le troisième vecteur de base : on a vu que le noyau contenait ce vecteur et, d'après le Thm du rang, la dimension du noyau est égale à $3 - 2 = 1$ (nb de colonnes - rang).

```
B = np.diag([1,1,2])
```

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice B est diagonale/triangulaire (au choix) et ses coefficients diagonaux sont *tous différents de* 0, donc la matrice B est *inversible*.
L'*image* de φ est donc $\mathbb{R}^3$ (3 lignes, donc l'espace d'arrivée est de dimension 3 et, par surjectivité, l'image est égale à l'espace d'arrivée).
Le *noyau* de φ est réduit au vecteur nul.

```
I3 = np.eye(3, dtype=np.int32)
(B-I3)*(B-2*I3)
```

On vient de trouver un polynôme annulateur de B : il s'agit de $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$.

```
C = np.matrix([[1,0,0],[0,2,0]])
```

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice C n'est *pas inversible*, car elle n'est même pas carrée.
Elle représente une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ (trois colonnes) dans $\mathbb{R}^2$ (deux lignes). Son rang est donc inférieur à 2.
Les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de φ est au moins égal à 2. Par conséquent, le rang de C est égal au nombre de lignes et l'application φ est *surjective*.
D'après le Thm du rang, $\dim \operatorname{Ker} C = 3 - 2 = 1$ et comme le noyau contient le vecteur $(0, 0, 1)$, il est en fait dirigé par ce vecteur : $\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1)$.

```
D = np.matrix([[1,0],[0,1],[1,-1]])
```

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice D n'est *pas inversible*.
Elle représente une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ (deux colonnes) dans $\mathbb{R}^3$ (trois lignes). Son rang est donc inférieur à 2 et elle n'est *pas surjective*.
Les deux colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le *rang* de φ est égal à 2.

D'après le Thm du rang, la matrice est *injective* :

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = n_c - \operatorname{rg} \varphi = 2 - 2 = 0$$

(où n_c est le nb de colonnes).
Son *image* est le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de D. Il est plus agréable de caractériser un plan de $\mathbb{R}^3$ par une équation cartésienne, le produit vectoriel permet d'en calculer une facilement : on trouve $x - y + z = 0$.

2 Exercices

Exercice 1

On considère la matrice M_1 définie par `M1=P*A*P2`.

$$M_1 = \begin{pmatrix} -16 & 11 & 6 \\ -16 & 11 & 6 \\ -10 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

On notera φ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Exprimer $\varphi(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Calculer le rang de φ. L'application φ est-elle injective ? surjective ?
3. Caractériser le noyau de φ.
4. Donner une base de $\operatorname{Im} \varphi$. En déduire une équation cartésienne de $\operatorname{Im} \varphi$.
5. On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1), v = (2, 2, 1)$ et $w = (-1, -2, 1)$.
   (a) Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 2

`M2=P2*A*P`
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\varphi(x, y, z) = (-10x - 20y + 16z,\quad 7x + 14y - 11z,\quad 3x + 6y - 5z).$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelle est la matrice de φ relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer le rang de φ. L'application φ est-elle injective ? surjective ?
4. Caractériser le noyau de φ.
5. Donner une base de $\operatorname{Im} \varphi$. En déduire une équation cartésienne de $\operatorname{Im} \varphi$.
6. On considère les vecteurs suivants.

   $$u = (-4, 3, 1) \quad v = (3, -2, -1) \quad w = (2, -1, 0)$$

   (a) Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 3

`M3=Q*B*Q2`

On considère les vecteurs

$$u = (2, -2, 3), \quad v = (2, 1, 1), \quad w = (1, 3, -1)$$

ainsi que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$M_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 \\ -15 & 13 & 18 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer qu'il existe une, et une seule, application linéaire

   $$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

   telle que $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = v$ et $\varphi(w) = 2w$. Quelle est la matrice de φ relative à la base $\mathscr{B}$?
3. Démontrer que φ est inversible.
4. Comparer les applications f et φ.
5. Trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}M_3P$ soit diagonale.

Exercice 4

`M4=P2*D`

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice

$$M_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs de n et p ?
2. L'application φ peut-elle être inversible ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
3. Donner une base et une équation cartésienne de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

Exercice 5

`M5=C*Q`

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs de n et p ?
2. L'application φ peut-elle être inversible ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
3. Donner une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

3 Méthodes de calcul à connaître

FORMULE FONDAMENTALE

Étant donnée une base de E :

$$\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$$

une base de F :

$$\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

et une application linéaire

$$\varphi \ : \ E \to F,$$

la matrice de φ relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est obtenue
- en calculant l'image par φ des vecteurs de la base $\mathscr{B}$:
$$\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_p)$$
- en décomposant ces vecteurs dans la base $\mathscr{C}$;
- en écrivant les coordonnées de ces vecteurs en colonnes.

La matrice d'une application linéaire est donc en particulier la matrice d'une famille de vecteurs.
Pour cette raison, **la matrice d'une application linéaire doit toujours être lue et écrite en colonnes**. (Les lignes ne sont pas susceptibles d'une interprétation géométrique.)

3.1 Étude d'une matrice

❧ Le **rang** d'une matrice peut être facilement calculé par des opérations de pivot sur les lignes et/ou sur les colonnes.
Il n'est pas nécessaire d'effectuer des opérations de pivot jusqu'à l'obtention d'une matrice J_r ! Dès qu'on obtient une matrice dont le rang est visible au coup d'œil, on peut s'arrêter. (Cf. le calcul du rang des matrices A, B, C et D.)
❧ Pour démontrer qu'une matrice est **inversible**, il suffit de calculer son rang.
Bien entendu, on peut aussi calculer son déterminant ou son inverse, mais ces calculs sont plus longs que le calcul du rang (car ils apportent une information bien plus importante que le rang).
❧ Pour calculer une **base de l'image**, il faut rappeler pour commencer que *l'image est engendrée par les colonnes* de la matrice.
Ensuite, il faut extraire une base de cette famille génératrice et pour cela, il faut déterminer les *relations de liaison* entre les colonnes, au moyen d'opérations de pivot sur les colonnes (et <u>seulement sur les colonnes</u>).
❧ Pour calculer une **base du noyau**, il s'agit de résoudre l'équation

$$MX = 0.$$

En notant $x_1, \ldots, x_p$ les coefficients de la colonne X et en notant $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de la matrice M, l'équation $MX = 0$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \cdots + x_p \cdot C_p = 0$$

ce qui signifie qu'on cherche une fois de plus les **relations de liaison** qui pourraient exister entre les colonnes de la matrice. On arrive donc au résultat en effectuant des opérations de pivot sur les colonnes (exclusivement).

3.2 Changement de base

❧ La matrice colonne qui représente un vecteur $x \in E$ dépend a priori de la base $\mathscr{B}$ choisie.
Étant données deux bases $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{B}_2$ de E, la **matrice de passage** de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ est définie par

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_2}(e_1, \ldots, e_p).$$

Cette matrice est donc écrite *colonne par colonne* et c'est ainsi qu'elle doit être lue !
Si on se donne deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de E, on peut représenter un même vecteur $x \in E$ par deux colonnes :

$$X_1 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x) \quad \text{et} \quad X_2 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x).$$

Ces deux colonnes sont reliées par la **Formule de changement de base pour les vecteurs** : si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$, alors

$$X_2 = P^{-1}X_1.$$

❧ De même, la matrice d'un endomorphisme φ de E dépend a priori de la base $\mathscr{B}$ choisie.
Les matrices de φ relatives à deux bases de E :

$$A_1 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi) \quad \text{et} \quad A_2 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi)$$

sont reliées par la **Formule de changement de base pour les matrices** : si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$, alors

$$A_2 = P^{-1}A_1P.$$

❧ On peut vérifier la cohérence de ces deux formules de changement de base.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\varphi(x)) &= A_1X_1 \\
\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\varphi(x)) &= A_2X_2 = (P^{-1}A_1P)(P^{-1}X_1) \\
&= P^{-1}(A_1X_1)
\end{aligned}$$