MPSI 1 - Semaine 21
Algèbre linéaire et calcul matriciel

Exercice 1

On considère la matrice M_1 définie par `M1=P*A*P2`.

$$M_1 = \begin{pmatrix} -16 & 11 & 6 \\ -16 & 11 & 6 \\ -10 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

On notera φ, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. - Exprimer $\varphi(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On effectue le produit matriciel

$$M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et on trouve :

$$\varphi(x, y, z) = (-16x + 11y + 6z,\ -16x + 11y + 6z,\ -10x + 7y + 4z).$$

(Les coefficients de chaque composante se lisent sur les lignes de la matrice M_1.)

2. - Calculer le rang de φ. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Les lignes L_2 et L_3 ne sont pas proportionnelles, donc le rang de M_1 est au moins égal à 2. Les lignes L_1 et L_2 sont égales, donc le rang de M_1 est au plus égal à 2.

Le rang de φ est égal au rang de M_1, donc à 2.

3. - Caractériser le noyau de φ.

D'après le Théorème du rang, la dimension du noyau de φ est égale à 1. Il s'agit donc de trouver un vecteur directeur de cette droite vectorielle. En effectuant les opérations de pivot

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \quad \text{et} \quad C_3 \leftarrow C_3 + C_1$$

on passe de la matrice M_1 à la matrice

$$\begin{pmatrix} -16 & -5 & -10 \\ -16 & -5 & -10 \\ -10 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $2(C_2 + C_1) = (C_3 + C_1)$, c'est-à-dire

$$C_1 + 2C_2 - C_3 = 0.$$

Le vecteur $(1, 2, -1)$ est donc un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}\varphi$, donc il dirige la droite $\operatorname{Ker}\varphi$.

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R} \cdot (1, 2, -1)$$

4. - Donner une base de $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire une équation cartésienne de $\operatorname{Im}\varphi$.

L'image de φ est engendrée par les colonnes de M_1 et on sait (calcul du rang !) que cette image est un plan vectoriel. Comme les deux dernières colonnes de M_1 ne sont pas proportionnelles, elles forment une famille libre de deux vecteurs de $\operatorname{Im}\varphi$, c'est-à-dire une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\big((11, 11, 7), (3, 3, 2)\big)$$

Un plan de $\mathbb{R}^3$ est représenté par une équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ où (a, b, c) est un vecteur normal au plan. Le produit vectoriel permet de calculer facilement un tel vecteur.

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Im}\varphi = [x - y = 0]$.

5. - On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 2, 1)$ et $w = (-1, -2, 1)$.

5.a. - Démontrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Pour démontrer qu'une famille de trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$ (= un espace vectoriel de dimension 3), il suffit de vérifier que le rang de cette famille est égal à 3, c'est-à-dire que le rang de la matrice représentant ces vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est égal à 3.

$$\mathfrak{Mat}_{can}(u, v, w) \overset{not.}{=} P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang est invariant par les opérations de pivot, donc

$$\operatorname{rg} \mathfrak{Mat}_{can}(u, v, w) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(on a effectué $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$).) Les colonnes sont échelonnées, donc le rang est bien égal à 3 et (u, v, w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

5.b. - Calculer la matrice de φ dans cette base.

En théorie, comme P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{C} = (u, v, w)$,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = P^{-1} M_1 P.$$

Mais normalement on ne change pas de base pour le plaisir, seulement parce qu'on a une très bonne raison de le faire...
En pratique, pour calculer $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$, il faut calculer $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ et $\varphi(w)$, puis les décomposer dans la base $\mathscr{C}$.
En calculant dans la base canonique,

$$\mathfrak{Mat}_{can}[\varphi(u)] = M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{can}(u)$$
$$\mathfrak{Mat}_{can}[\varphi(v)] = M_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathfrak{Mat}_{can}(v)$$
$$\mathfrak{Mat}_{can}[\varphi(w)] = M_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{can}(0)$$

donc

$$\varphi(u) = u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$$
$$\varphi(v) = 2 \cdot V = 0 \cdot u + 2 \cdot v + 0 \cdot w$$
$$\varphi(w) = 0 = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$$

et par conséquent

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

```
M2=P2*A*P
```

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\varphi(x, y, z) = (-10x - 20y + 16z, \quad 7x + 14y - 11z, \quad 3x + 6y - 5z).$$

1. - Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Il s'agit de vérifier que

$$\varphi\big(\lambda \cdot (x, y, z) + (x', y', z')\big) = \lambda \cdot \varphi(x, y, z) + \varphi(x', y', z')$$

quels que soient le scalaire λ et les vecteurs (x, y, z) et (x', y', z').
C'est très long...

2. - Quelle est la matrice de φ relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

Pour obtenir la matrice de φ relative à la base canonique, il suffit d'écrire ligne par ligne les coefficients des différentes composantes de $\varphi(x, y, z)$.

$$\mathfrak{Mat}_{can}(\varphi) \overset{not.}{=} M_2 = \begin{pmatrix} -10 & -20 & 16 \\ 7 & 14 & -11 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

3. - Calculer le rang de φ. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Les deux premières colonnes de M_2 sont proportionnelles ($C_2 = 2C_1$), donc le rang de φ est au plus égal à 2. Les deux dernières colonnes de M_2 ne sont pas proportionnelles, donc le rang de φ est au moins égal à 2.
Par conséquent, le rang de φ est égal à 2.
L'image de φ est donc un plan de $\mathbb{R}^3$, donc φ n'est pas surjective.
D'après le Thm du rang, la dimension du noyau de φ est donc égale à $3 - 2 = 1$, donc le noyau n'est pas réduit au vecteur nul et φ n'est pas injective.

4. - Caractériser le noyau de φ.

On sait que le noyau est une droite vectorielle et la relation de liaison $C_2 = 2C_1$, qui s'écrit aussi

$$2 \cdot C_1 + (-1) \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 = 0$$

nous dit que le vecteur $(2, -1, 0)$ appartient au noyau. Donc

$$\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R} \cdot (2, -1, 0).$$

5. - Donner une base de $\operatorname{Im} \varphi$. En déduire une équation cartésienne de $\operatorname{Im} \varphi$.

L'image est engendrée par les colonnes de M_2 et on peut se dispenser de la seconde colonne (puisqu'elle est proportionnelle à la première). Donc

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\big((-10,7,3),(16,-11,-5)\big).$$

Pour trouver une équation cartésienne de ce plan, on a le choix entre calculer le produit vectoriel de ces deux vecteurs ou remarquer (avec un peu de chance) sur la matrice M_1 une relation de liaison entre les lignes :

$$1\cdot L_1 + 1\cdot L_2 + 1\cdot L_3 = 0$$

dont les coefficients nous donnent une équation cartésienne vérifiée par les trois colonnes de la matrice et donc par tous les vecteurs de l'image :

$$\operatorname{Im}\varphi = [x+y+z=0].$$

6. - On considère les vecteurs suivants.

$$u=(-4,3,1)\quad v=(3,-2,-1)\quad w=(2,-1,0)$$

6.1. - Démontrer que $\mathscr{C} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $P = \mathfrak{Mat}_{can}(u,v,w)$. En effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, on obtient

$$\operatorname{rg} P = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc elles forment une famille libre. La première colonne n'est visiblement pas engendrée par les deux dernières colonnes (à cause du coefficient $p_{3,1}$), donc les trois colonnes forment une famille libre, ce qui prouve que (u,v,w) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ — et par la même occasion que la matrice P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w).

6.2. - Calculer la matrice de φ dans cette base.

En multipliant la matrice M_2 par les colonnes de la matrice P, on obtient (dans la base canonique) :

$$\varphi(u)=u,\qquad \varphi(v)=-2v,\qquad \varphi(w)=0$$

et par conséquent

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 3

`M3=Q*B*Q2`

On considère les vecteurs

$$u=(2,-2,3),\quad v=(2,1,1),\quad w=(1,3,-1)$$

ainsi que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice

$$M_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6\\ -15 & 13 & 18\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. - Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On note $\equiv$ pour dire que deux matrices ont même rang.

$$\mathfrak{Mat}_{can}(u, v, w) \overset{not.}{=} P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & -5 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3 \end{cases}$$

On voit que les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles, donc le rang de P est au moins égal à 2. De plus, la première colonne n'est pas combinaison linéaire des deux dernières colonnes (à cause du coefficient $p_{1,1} \neq 0$), donc les trois colonnes sont linéairement indépendantes.

Par conséquent, (u, v, w) est une famille libre de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est bien une base.

2. - Démontrer qu'il existe une, et une seule, application linéaire

$$\varphi \; : \; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

telle que $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = v$ et $\varphi(w) = 2w$. Quelle est la matrice de φ relative à la base $\mathscr{B}$?

On applique le ***Thm de caractérisation*** *:* étant données

– une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E et

– une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs de F,

il existe une, et une seule, application linéaire $\varphi \in L(E, F)$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p, \quad \varphi(e_j) = f_j.$$

Pour nous : $E = F = \mathbb{R}^3$; la base de l'espace de départ est la famille (u, v, w) et la famille de vecteurs de l'espace d'arrivée est la famille $(u, v, 2w)$.

Les décompositions de $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ et $\varphi(w)$ dans la base $\mathscr{B}$ sont immédiates :

$$\begin{cases} \varphi(u) &= u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w \\ \varphi(v) &= v = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w \\ \varphi(w) &= 2w = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 2 \cdot w \end{cases}$$

et la matrice s'en déduit colonne par colonne :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(J'insiste sur le colonne par colonne*, car c'est la méthode à retenir. Comme notre matrice est symétrique, on pourrait se tromper sur ce point sans s'en apercevoir.)*

3. - Démontrer que φ est inversible.

La matrice de φ est triangulaire (diagonale en fait) et les coefficients diagonaux sont sont tous différents de 0, donc la matrice est inversible et φ aussi.

VARIANTE.— *L'image de $\mathscr{B} = (u, v, w)$ par φ est une base de $\mathbb{R}^3$: $(u, v, 2 \cdot w)$ (clairement libre et génératrice par comparaison à $\mathscr{B}$), cela suffit pour prouver que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.*

4. - Comparer les applications f et φ.

Pour comparer deux applications linéaires, il faut comparer leurs matrices relatives à une même base... *Pour le moment, on connaît la*

matrice de f relative à la base canonique et la matrice de φ relative à la base $\mathscr{B}$: il nous faut poser quelques calculs.
❧ *Calculons l'image de $\mathscr{B}$ par f.*

$$M_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ M_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ M_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$f(u) = \varphi(u), \quad f(v) = \varphi(v), \quad f(w) = \varphi(w)$$

et donc que $f = \varphi$. (Thm : si deux applications *linéaires* coïncident sur une base, alors elles sont égales partout.*)*
❧ *Variante : La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique est la matrice P^{-1} (puisque P est, par construction, la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$). D'après la formule du changement de base, la matrice relative à la base canonique de φ est égale à*

$$(P^{-1})^{-1} \times \mathrm{Diag}(1,1,2) \times (P^{-1}) = P \times \mathrm{Diag}(1,1,2) \times P^{-1}.$$

Je vous laisse faire les calculs... vous trouverez M_3.

REMARQUE.— *Normalement, on ne change pas de base pour le seul plaisir de faire des calculs matriciels. Il faut bien que la nouvelle base ait un intérêt mathématique (par exemple, le grand intérêt de simplifier les calculs).*

5. - Trouver une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}M_3P$ soit diagonale.
Puisque la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ est la matrice P définie plus haut et que $f = \varphi$, on déduit de la formule de changement de base que

$$P^{-1}M_3P = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \mathrm{Diag}(1,1,2).$$

Exercice 4

`M4=P2*D`

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice

$$M_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. - Quelles sont les valeurs de n et p ?
La dimension de l'espace de départ est égale au nombre de colonnes.
La dimension de l'espace d'arrivée est égale au nombre de lignes.

$$p = 2 \qquad n = 3 \qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

2. - L'application φ peut-elle être inversible ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
Thm : Deux espaces vectoriels sont isomorphes si, et seulement si, leurs dimensions sont égales.
Comme l'espace de départ et l'espace d'arrivée n'ont pas même dimension, l'application linéaire φ ne peut pas être bijective.

❧ *Plus précisément, comme la dimension de l'espace de départ est strictement inférieure à la dimension de l'espace d'arrivée, l'application φ ne peut pas être surjective. (Il n'y a pas assez de colonnes pour recouvrir tout l'espace d'arrivée.)*

❧ *Les deux colonnes de la matrice ne sont pas proportionnelles, donc l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et par conséquent φ est injective.*

3. - Donner une base et une équation cartésienne de $\operatorname{Im}\varphi$.

L'image de φ est engendrée par les colonnes de la matrice. C'est donc bien un plan de $\mathbb{R}^3$.
On calcule le produit vectoriel.

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Im}\varphi = [(-1)\cdot x + (-1)\cdot y + 0\cdot z = 0] = [x+y=0].$$

Exercice 5

M5=C*Q

On considère l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. - Quelles sont les valeurs de n et p ?

Mêmes justifications qu'à l'exercice précédent !

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

2. - L'application φ peut-elle être inversible ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

L'application φ ne peut pas être inversible car sa matrice n'est pas carrée.
Elle ne peut pas être injective car la dimension de l'espace de départ est strictement supérieure à la dimension de l'espace d'arrivée (il y a trop de colonnes pour qu'elles soient indépendantes).

Les deux premières colonnes de la matrice ne sont pas proportionnelles, donc le rang est au moins égal à 2. Or la dimension de l'espace d'arrivée est égale à 2. Donc l'image de φ est égale à l'espace d'arrivée, c'est-à-dire : φ est surjective.

3. - Donner une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.

D'après le Thm du rang, la dimension du noyau est égale à la différence entre le nombre de colonnes (= la dimension de l'espace de départ) et le rang, soit :

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3 - 2 = 1$$

Pour trouver un vecteur directeur du noyau, on cherche une relation de liaison entre les colonnes de la matrice. Pour cela, on effectue les opérations de pivot

$$C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 \quad \textit{et} \quad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3$$

et on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -16 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

ce qui nous montre que $5(C_1 - 2C_3) = 8(C_2 - 2C_3)$, *soit :*

$$5 \cdot C_1 - 8 \cdot C_2 + 6 \cdot C_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R} \cdot (5, -8, 6).$$

VARIANTE.— *Résoudre le système* $M_5 X = 0$ *revient aussi à trouver un vecteur* X *orthogonal aux lignes de la matrice* M_5. *On aurait aussi pu calculer le produit vectoriel*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

pour trouver un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} \varphi$.