Espaces euclidiens [53]

Cet exercice porte sur des notions simples (endomorphisme diagonalisable, endomorphisme inversible, endomorphisme symétrique) et les calculs restent à un niveau élémentaire. La difficulté (réelle) réside dans la mise en forme de la démonstration (trois équivalences à démontrer).

⋆

Il est bien clair que f est un endomorphisme de E.

► Quels que soient x et y dans E,

$$\begin{aligned} \langle f(x) \mid y \rangle &= \langle x \mid y \rangle - \langle a \mid x \rangle \langle b \mid y \rangle \\ \langle x \mid f(y) \rangle &= \langle x \mid y \rangle - \langle a \mid y \rangle \langle b \mid x \rangle \end{aligned}$$

donc l'endomorphisme f est symétrique si, et seulement si, quels que soient x et y dans E,

$$\big\langle \langle b \mid y \rangle \cdot a - \langle a \mid y \rangle \cdot b \,\big|\, y \big\rangle = 0.$$

Comme le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul, on en déduit que f est symétrique si, et seulement si,

$$\forall\, y \in E, \quad \langle b \mid y \rangle \cdot a = \langle a \mid y \rangle \cdot b.$$

[$\Rightarrow$] Si f est symétrique, alors on déduit de la relation précédente que b est proportionnel à a puisque (avec $y = a$)

$$b = \langle a \mid b \rangle \cdot a.$$

(Rappel : $\|a\| = 1$ par hypothèse.)
[$\Leftarrow$] Si b est proportionnel à a, alors il existe un scalaire $t \in \mathbb{R}$ tel que $b = t \cdot a$ et

$$\forall\, y \in E, \quad \langle b \mid y \rangle \cdot a = t \cdot \langle a \mid y \rangle \cdot a = \langle a \mid y \rangle \cdot (t \cdot a) = \langle a \mid y \rangle \cdot b$$

donc l'endomorphisme f est bien symétrique.

▷ On a donc prouvé que : l'endomorphisme f est symétrique si, et seulement si, le vecteur b est proportionnel au vecteur a.

Comme a et b sont unitaires, on a en fait prouvé que : l'endomorphisme f est symétrique si, et seulement si, $a = \pm b$.

► Nous allons d'abord étudier la surjectivité de f !

▷ Fixons $y \in E$ et cherchons à résoudre l'équation

$$y = f(x) = x - \langle a \mid x \rangle \cdot b$$

d'inconnue $x \in E$.

Il faut nécessairement que

$$\langle y \mid a \rangle = \langle x \mid a \rangle - \langle x \mid a \rangle \cdot \langle a \mid b \rangle = \langle x \mid a \rangle \cdot \big(1 - \langle a \mid b \rangle\big)$$

(on a utilisé la symétrie et la bilinéarité du produit scalaire).

▷ Premier cas : si $\langle a \mid b \rangle = 1$, alors il faut que $\langle y \mid a \rangle = 0$.

En d'autres termes : si l'équation a au moins une solution x (c'est-à-dire si y a été choisi dans l'image de f), alors il faut que le vecteur y soit orthogonal à a.

Dans ce cas, $\operatorname{Im} f \subset (\mathbb{R} \cdot a)^{\perp}$, ce qui prouve que f n'est pas surjective et a fortiori pas bijective.

▷ Deuxième cas : si $\langle a \mid b \rangle \neq 1$, alors on peut diviser ! et on arrive à

$$x = y + \frac{\langle a \mid y \rangle}{1 - \langle a \mid b \rangle} \cdot b.$$

Attention ! on a raisonné par condition nécessaire, donc réciproque obligatoire !

On vérifie sans difficulté que

$$\forall\, y \in E, \quad f\Big(y + \frac{\langle\, a \,|\, y\,\rangle}{1 - \langle\, a \,|\, b\,\rangle} \cdot b\Big) = y.$$

▷ Bref : l'endomorphisme f est surjectif si, et seulement si, $\langle\, a \,|\, b\,\rangle \neq 1$ et comme E est un espace de dimension finie, on en déduit que f est inversible si, et seulement si, $\langle\, a \,|\, b\,\rangle \neq 1$ et, dans ce cas, la relation précédente nous donne l'expression de la bijection réciproque.

▷ Comme les vecteurs a et b sont unitaires, la condition $\langle\, a \,|\, b\,\rangle = 1$ équivaut à $\langle\, a \,|\, b\,\rangle = \|a\|\,\|b\|$ et d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, cela équivaut au fait que a et b soient proportionnels et de même sens, c'est-à-dire $a = b$ (ils sont unitaires, rappelons-le).

► Le réel λ est une valeur propre de f si, et seulement si, il existe un vecteur **non nul** $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda \cdot x$ c'est-à-dire

$$(1 - \lambda) \cdot x = \langle\, a \,|\, x\,\rangle \cdot b.$$

▷ Premier cas : $\lambda = 1$.
Dans ce cas, $\langle\, a \,|\, x\,\rangle = 0$ (puisque $b \neq 0_E$) et donc $x \in (\mathbb{R} \cdot a)^\perp$.
Réciproquement, si $x \in (\mathbb{R} \cdot a)^\perp$, alors $f(x) = x = 1 \cdot x$.
Donc $1 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - I_E) = (\mathbb{R} \cdot a)^\perp$.

▷ Deuxième cas : $\lambda \neq 1$.
Dans ce cas, on peut diviser !

$$x = \underbrace{\frac{\langle\, a \,|\, x\,\rangle}{1 - \lambda}}_{t} \cdot b \in \mathbb{R} \cdot b$$

et comme $x \neq 0_E$, alors il faut que $t \neq 0$, donc $\langle\, a \,|\, x\,\rangle \neq 0$. Et comme $b = (1/t) \cdot x$, il faut donc que $\langle\, a \,|\, b\,\rangle \neq 0$.

Réciproquement, si $\langle\, a \,|\, b\,\rangle \neq 0$, alors

$$f(b) = \underbrace{(1 - \langle\, a \,|\, b\,\rangle)}_{=\lambda} \cdot b$$

et le réel λ est une valeur propre de f, la droite $\mathbb{R} \cdot b$ est contenue dans le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(f - \lambda I_E)$.

▷ Maintenant qu'on y voit plus clair, on peut finir !

Si $\langle\, a \,|\, b\,\rangle \neq 0$, alors on a trouvé deux valeurs propres distinctes : 1 et $\lambda = 1 - \langle\, a \,|\, b\,\rangle$. Le sous-espace propre associé à 1 est un hyperplan et la dimension de l'autre sous-espace propre est au moins égale à 1, donc

$$\dim \mathrm{Ker}(f - I_E) + \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda I_E) \geqslant \dim E$$

ce qui prouve que f est diagonalisable et donc que

$$E = (\mathbb{R} \cdot a)^\perp \oplus (\mathbb{R} \cdot b)$$

puisque $\mathrm{Ker}(f - \lambda I_E) = \mathbb{R} \cdot b$ (inclusion et égalité des dimensions).

Réciproquement, si $\langle\, a \,|\, b\,\rangle = 0$, alors la seule valeur propre trouvée est 1 et le sous-espace propre est un hyperplan, donc f n'est pas diagonalisable.

Conclusion : f est diagonalisable si, et seulement si, $\langle\, a \,|\, b\,\rangle \neq 0$.

REMARQUE.— En particulier, si f est symétrique, alors $\langle\, a \,|\, b\,\rangle = \pm 1$ et f est diagonalisable, tout est en ordre !