MPSI 2 - Semaine 22

A.
A - 1. Énoncer le Théorème de changement de variable dans une intégrale.
A - 2. Énoncer la Formule d'intégration par parties.
A - 3. Quelle différence entre *intégrale* et *primitive* ?

$\star$

B.
B - 1. Écrire les expression suivantes sous la forme $f(\cos x)\sin x$.

$$\tan x \qquad \sin^3 x \qquad \sin 2x \cos x$$

Comment en déduire les primitives ?
B - 2. Écrire les expression suivantes sous la forme $f(\sin x)\cos x$.

$$\cos^3 x \qquad \sin x \sin 2x \qquad \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$$

Comment en déduire les primitives ?
B - 3. Écrire les expression suivantes sous la forme $f(\tan x)$.

$$\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \qquad \frac{\cos 2x}{1+\cos^2 x}$$

Comment en déduire les primitives ?

$\star$

C. On veut calculer les primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

C - 1. Parmi les fonctions usuelles dont on connaît les primitives, quelles sont celles qui ressemblent à f ?
C - 2. Quel changement de variable cela suggère-t-il ? Effectuer ce changement de variable et démontrer que la fonction F définie par

$$F(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

est une primitive de f.
C - 3. Calculer les primitives de la fonction Arcsin au moyen d'une intégration par parties.
C - 4. Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction Arcsin entre les abscisses $x = 0$ et $x = 1$. (On demande une figure.)

$\star$

D. On considère le sous-espace F de $E = \mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs suivants.

$$u = (1, 2, -1), \quad v = (-2, 1, 3) \quad \text{et} \quad w = (-1, 3, 2)$$

D - 1. Quelle est la dimension de F ?

D - 2. Trouver une base (e_1, e_2) de F où les vecteurs e_1 et e_2 sont de la forme

$$e_1 = (a, 0, b) \quad \text{et} \quad e_2 = (0, c, d)$$

où a, b, c et d sont entiers.

D - 3. Le sous-espace G_1 d'équation $[3x - y + 5z = 0]$ est-il un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$?

D - 4. Que dire de $F \cap G_1$?

D - 5. Le sous-espace $G_2 = \mathbb{R} \cdot (3, 1, -4)$ est-il un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$?

$\star$

E. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y, z) = (4x - 2y + 2z,\\ 3x - y + 2z, \quad -3x + 2y - z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

E - 1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

E - 2. On note $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$, les images respectives par φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$, puis $\varphi(\mathbf{u}_1)$, $\varphi(\mathbf{u}_2)$ et $\varphi(\mathbf{u}_3)$.

E - 3. On suppose que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

E - 4. La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est-elle une famille libre ?

E - 5. Donner une base et une équation cartésienne de $\operatorname{Im} \varphi$.

E - 6. Donner un vecteur directeur de $\operatorname{Ker} \varphi$.

$\star$

F. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les deux sous-espaces

$$F = [x - 2y + 3z + t = 0] \quad \text{et} \quad G = [2x + y - z - t = 0].$$

F - 1. Expliquer pourquoi F et G sont bien des sous-espaces de $E = \mathbb{R}^4$. Quelles sont leurs dimensions ?

F - 2. Démontrer *sans calcul* que $F \cap G$ est un plan vectoriel.

F - 3. Calculer une base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de $F \cap G$.

F - 4. Justifier *sans calcul* qu'il existe deux vecteurs $\mathbf{u}_3$ et $\mathbf{u}_4$ tels que

$$F = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4).$$

Trouver des vecteurs $\mathbf{u}_3$ et $\mathbf{u}_4$ qui vérifient ces propriétés.

F - 5. Démontrer que les trois sous-espaces

$$F \cap G, \quad \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3, \quad \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_4$$

sont en somme directe. Quelle est la dimension du sous-espace

$$(F \cap G) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_4) \quad ?$$