MPSI 2 - Semaine 22

A.

A - 1. Énoncer le Théorème de changement de variable dans une intégrale.

Si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I et si f est continue sur l'intervalle $\varphi(I)$, alors

$$\forall\, a, b \in I, \quad \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du.$$

En pratique, on note $u = \varphi(t)$ et $du = \varphi'(t) \cdot dt$.

A - 2. Énoncer la Formule d'intégration par parties.

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I, alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

quels que soient a et b dans I.

A - 3. Quelle différence entre *intégrale* et *primitive* ?

A priori, il n'y a aucun rapport ! Une intégrale est un nombre, *noté*

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

tandis qu'une primitive est une fonction dérivable...
C'est tout l'intérêt du Théorème fondamental que de relier ces deux concepts qui devraient n'avoir aucun lien...

⋆

B.

B - 1. Écrire les expression suivantes sous la forme $f(\cos x)\sin x$.

$$\tan x \qquad \sin^3 x \qquad \sin 2x \cos x$$

Comment en déduire les primitives ?

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \\ \sin^3 x &= (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \\ \sin 2x \cos x &= (2\cos^2 x) \cdot \sin x \end{aligned}$$

On pose $u = \cos x$ et on calcule les primitives de $-f(u)$. (Attention au signe !)

B - 2. Écrire les expression suivantes sous la forme $f(\sin x)\cos x$.

$$\cos^3 x \qquad \sin x \sin 2x \qquad \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$$

Comment en déduire les primitives ?

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \\ \sin x \sin 2x &= (2\sin^2 x) \cdot \cos x \\ \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} &= \frac{1}{2 - \sin^2 x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

On pose $u = \sin x$ *et on calcule les primitives de* $f(u)$.

B - 3. Écrire les expression suivantes sous la forme $f(\tan x)$.

$$\frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \qquad \frac{\cos 2x}{1+\cos^2 x}$$

Comment en déduire les primitives ?

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 x} &= 1+\tan^2 x\\ \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} &= \tan^2 x(1+\tan^2 x)\\ \frac{\cos 2x}{1+\cos^2 x} &= \frac{1-\tan^2 x}{2+\tan^2 x}\end{aligned}$$

On pose $u = \tan x$ *et on calcule les primitives de* $\frac{f(u)}{1+u^2}$.

$\star$

C. On veut calculer les primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

C - 1. Parmi les fonctions usuelles dont on connaît les primitives, quelles sont celles qui ressemblent à f ?

$f(u) = 1/\sqrt{u}$ *par exemple...*

C - 2. Quel changement de variable cela suggère-t-il ? Effectuer ce changement de variable et démontrer que la fonction F définie par

$$F(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

est une primitive de f.

On pose $u = 1-x^2$ *(fonction de classe* $\mathscr{C}^1$ *en* x*), donc* $du = -2x\,dx$ *et*

$$f(x)\,dx = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x\,dx) = -\left(\frac{1}{2}u^{-1/2}\,du\right)$$

donc $F(x) = -\sqrt{u}$ *est bien une primitive de* f.

C - 3. Calculer les primitives de la fonction Arcsin au moyen d'une intégration par parties.

On intègre par parties avec l'astuce classique pour se débarrasser des quantités compliquées.

$$\begin{aligned}\int 1\cdot \operatorname{Arcsin} x\,dx &= x\cdot\operatorname{Arcsin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\cdot\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

C - 4. Calculer l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction Arcsin entre les abscisses $x=0$ et $x=1$. (On demande une figure.)

Cette aire est par définition égale à

$$\int_0^1 \operatorname{Arcsin} x\,dx = \left[x\cdot\operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$\star$

D. On considère le sous-espace F de $E = \mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs suivants.

$$u = (1, 2, -1), \quad v = (-2, 1, 3) \quad \text{et} \quad w = (-1, 3, 2)$$

D - 1. Quelle est la dimension de F ?

Par construction, le sous-espace F est engendré par trois vecteurs, donc $\dim F \leqslant 3$. Les vecteurs u et v ne sont pas proportionnels, donc le rang de la famille (u, v, w) est au moins égal à 2 et donc $\dim F \geqslant 2$.
On traduit la relation de liaison $w = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$ sous la forme d'un système de trois équations (une équation pour chaque coordonnée) en deux inconnues (α et β). En résolvat ce système, on trouve une solution particulière :

$$w = 1 \cdot u + 1 \cdot v$$

donc $\dim F = \mathrm{rg}(u, v, w) = 2$.

D - 2. Trouver une base (e_1, e_2) de F où les vecteurs e_1 et e_2 sont de la forme

$$e_1 = (a, 0, b) \quad \text{et} \quad e_2 = (0, c, d)$$

où a, b, c et d sont entiers.

Comme $\dim F = 2$, toute base de F est un couple de vecteurs non proportionnels. Cela dit, rien ne prouve a priori qu'il existe forcément une base de la forme indiquée.
<u>Première méthode :</u> on pose le système

$$e_i = \alpha \cdot u + \beta \cdot v,$$

il s'agit encore d'un système de trois équations mais en quatre *inconnues : α, β, a et b.*

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta - a = 0 & \textit{1ère coordonnée} \\ 2\alpha + \beta = 0 & \textit{2ème coordonnée} \\ -\alpha + 3\beta - b = 0 & \textit{3ème coordonnée} \end{cases}$$

On applique l'algorithme du pivot :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta - a = 0 \\ 5\beta + 2a = 0 \\ \beta - a + b = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta - a = 0 \\ 7a - 5b = 0 \\ \beta - a + b = 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3)$$

On trouve une infinité de vecteurs possibles :

$$\exists\, s \in \mathbb{R}^*, \qquad e_1 = s \cdot (5, 0, -7).$$

<u>Deuxième méthode :</u> on calcule une équation cartésienne du plan F, par exemple en calculant le produit vectoriel des vecteurs u et v qui engendrent F (voir par ailleurs). On trouve alors

$$F = [7x - y + 5z = 0]$$

et par conséquent, en réinjectant $(x, y, z) = (0, c, d)$ dans cette équation, on obtient :

$$\exists\, t \in \mathbb{R}^*, \qquad e_2 = t \cdot (0, 5, 1).$$

D - 3. Le sous-espace G_1 d'équation $[3x - y + 5z = 0]$ est-il un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$?

Comme F et G sont des plans, s'ils étaient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, alors

$$4 = \dim F + \dim G = \dim E = 3,$$

ce n'est pas possible.

D - 4. Que dire de $F \cap G_1$?

D'après la Formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim F \cap G_1 &= \dim F + \dim G_1 - \dim(F + G_1) \\ &= 4 - \dim(F + G_1). \end{aligned}$$

Or $F \subset F+G_1 \subset \mathbb{R}^3$, donc $2 \leqslant \dim(F+G_1) \leqslant 3$ et si $\dim(F+G_1) = 2$, alors $F + G_1 = F$ et donc $G_1 \subset F$ et enfin $G_1 = F$.
Comme les équations de G_1 et F ne sont pas proportionnelles, on en déduit que $G_1 \neq F$ et ainsi $\dim(F + G_1) = 3$, d'où enfin

$$\dim(F \cap G_1) = 1.$$

❧ *Connaissant une équation de F et une équation de G_1, en posant le système, on obtient une représentation cartésienne de la droite vectorielle $F \cap G_1$*

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

et en résolvant ce système (avec $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$), on obtient un vecteur directeur de cette droite : $(0, 5, 1)$ par exemple.
❧ *Variante : on peut aussi chercher pour quels scalaires α et β le vecteur*

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in F$$

appartient aussi à G_1 (= les coordonnées de ce vecteur vérifient une équation de G_1).
Le vecteur

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ 2\alpha + \beta \\ -\alpha + 3\beta \end{pmatrix}$$

appartient à F par définition et aussi à G_1 si, et seulement si,

$$3 \cdot (\alpha - 2\beta) - (2\alpha + \beta) + 5(-\alpha + 3\beta) = 0$$

c'est-à-dire $-4\alpha + 8\beta = 0$, soit $\alpha = 2\beta$ et donc par exemple

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v = 2 \cdot u + v = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D - 5. Le sous-espace $G_2 = \mathbb{R} \cdot (3, 1, -4)$ est-il un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$?

Cette fois, le sous-espace G_2 est une droite et

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim F + \dim G_2.$$

Il reste à étudier l'intersection $F \cap G_2$ et pour cela, il suffit de vérifier si le vecteur $(3, 1, -4) \in G_2$ appartient, ou non, au sous-espace F (= vérifie l'équation cartésienne connue de F).
Clairement, le vecteur $(3, 1, -4)$ vérifie l'équation

$$[7x - y + 5z = 0],$$

donc $G_2 \subset F$, ce qui prouve que F et G_2 ne sont pas supplémentaires dans E.

⋆

E. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x,y,z) = (4x - 2y + 2z, \\ 3x - y + 2z, \quad -3x + 2y - z)$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

E - 1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Il s'agit de vérifier que

$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) = \lambda\varphi(x_1,y_1,z_1) + \varphi(x_2,y_2,z_2)$$

quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}$, (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) dans $\mathbb{R}^3$. Long mais sans difficulté...

E - 2. On note $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$, les images respectives par φ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$, puis $\varphi(\mathbf{u}_1)$, $\varphi(\mathbf{u}_2)$ et $\varphi(\mathbf{u}_3)$.

On calcule l'image de la base canonique par φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \varphi(1,0,0) = (4,3,-3) \\ \mathbf{u}_2 &= \varphi(0,1,0) = (-2,-1,2) \\ \mathbf{u}_3 &= \varphi(0,0,1) = (2,2,-1) \end{aligned}$$

et on en déduit de la même manière :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{u}_1) &= (4,3,-3) = \mathbf{u}_1 \\ \varphi(\mathbf{u}_2) &= (-2,-1,2) = \mathbf{u}_2 \\ \varphi(\mathbf{u}_3) &= (2,2,-1) = \mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

E - 3. On suppose que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

*Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. **Si** $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ était une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, alors il existerait un triplet*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

tel que

$$v = \alpha_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{u}_3$$

et par linéarité de φ

$$\varphi(v) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \cdot \varphi(\mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \cdot u_k = \mathbf{v}.$$

E - 4. La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est-elle une famille libre ?

Manifestement, la propriété $\varphi(\mathbf{v})$ n'est pas vraie pour tous *les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (elle est fausse sur les vecteurs de la base canonique par exemple). Par conséquent, la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ n'est pas génératrice.*
Or, dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension trois*, une famille de* trois *vecteurs est génératrice si, et seulement si, elle est libre (ou : c'est une*

base), donc la famille $(\mathbf{u}_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$ n'est pas une famille libre : elle est liée.

❧ *Si on ne voit pas le rapport avec la question précédente, on peut procéder comme d'habitude. On cherche les relations de liaison*

$$\alpha \cdot \mathbf{u}_1 + \beta \cdot \mathbf{u}_2 + \gamma \cdot \mathbf{u}_3 = 0$$

en résolvant le système homogène

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\alpha & - & 2\beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ -3\alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{r} \textit{1ère coord.} \\ \textit{2ème coord.} \\ \textit{3ème coord.} \end{array}$$

au moyen de l'algorithme du pivot. (NB : toute autre méthode de résolution est proscrite.*)*
Il suffit de vérifier que ce système admet une seule solution :

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

ce qui est effectivement le cas ici.

E - 5. Donner une base et une équation cartésienne de $\operatorname{Im}\varphi$.

Comme la base canonique est une base de $\mathbb{R}^3$ (!), son image par φ engendre $\operatorname{Im}\varphi$, *c'est-à-dire*

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Comme la famille $(\mathbf{u}_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$ est liée, son rang est au plus égal à 2. D'autre part, les vecteurs $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ ne sont pas proportionnels, donc c'est une famille libre de rang 2 dans un sous-espace de dimension inférieure à 2. Il s'agit donc d'une base du plan $\operatorname{Im}\varphi$ *:*

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

REMARQUE.— *Avec les mêmes arguments,*

$$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = \operatorname{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

❧ *Pour en déduire une équation cartésienne, on calcule le produit vectoriel.*

$$\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\operatorname{Im}\varphi = [-3x + y - 2z = 0] = [3x - y + 2z = 0].$$

E - 6. Donner un vecteur directeur de $\operatorname{Ker}\varphi$.

D'après le Théorème du rang, la dimension du noyau de φ est égale à $3 - 2 = 1$ (soit $\dim\mathbb{R}^3 - \operatorname{rg}\varphi$), c'est bien une droite vectorielle.
Pour trouver un vecteur du noyau, il s'agit de trouver trois scalaires α_1, α_2 et α_3 tels que

$$0 = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{3} \alpha_k \cdot e_k\Big) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \cdot u_k$$

c'est-à-dire une relation de liaison *entre les vecteurs $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant 3}$.*
Par la résolution d'un système d'équations ou par du calcul matriciel (cette méthode étant plus efficace), on trouve

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = 0$$

et on peut conclure que

$$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}\cdot(1,1,-1).$$

$\star$

F. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les deux sous-espaces

$$F = [x - 2y + 3z + t = 0] \quad \text{et} \quad G = [2x + y - z - t = 0].$$

F - 1. Expliquer pourquoi F et G sont bien des sous-espaces de $E = \mathbb{R}^4$. Quelles sont leurs dimensions ?

Les ensembles F et G sont les noyaux respectifs de deux formes linéaires non nulles (l'image du premier vecteur de la base canonique, par exemple, n'est pas nulle), donc F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ et plus précisément des hyperplans.

$$\dim F = \dim G = 3$$

F - 2. Démontrer *sans calcul* que $F \cap G$ est un plan vectoriel.

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un espace vectoriel.
Les inclusions $F \subset F + G \subset \mathbb{R}^4$ sont évidentes. Mais les espaces F et G sont distincts, donc $F \subsetneq F + G$, donc

$$3 = \dim F < \dim(F + G) \leqslant \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

donc $\dim(F + G) = 4$ et donc $F + G = \mathbb{R}^4$ (inclusion et égalité des dimensions).
La formule de Grassmann

$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$$

nous dit alors que

$$\dim F \cap G = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Donc $F \cap G$ est bien un plan vectoriel.

F - 3. Calculer une base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de $F \cap G$.

Les vecteurs qui appartiennent au sous-espace $F \cap G$ sont précisément les solutions du système linéaire suivant

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 0 \\ 2x + y - z - t = 0 \end{cases}$$

qui sont aussi les solutions du système suivant ($L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 0 \\ \phantom{x -{}} 5y - 7z - 3t = 0 \end{cases}$$

On résout ce système triangulaire en posant

$$z = 5u \qquad \text{et} \qquad t = 5v$$

pour en déduire enfin que

$$x = -u + v \qquad \text{et} \qquad y = 7u + 3v.$$

Une base de $F \cap G$ est donc donnée par

$$\mathbf{u}_1 = (-1, 7, 5, 0) \qquad \mathbf{u}_2 = (1, 3, 0, 5)$$

(pour $(u,v)=(1,0)$ et $(u,v)=(0,1)$).

REMARQUE.— *Il faut prendre l'habitude de vérifier systématiquement un tel résultat (en réinjectant les solutions dans le système initial).*

F - 4. Justifier *sans calcul* qu'il existe deux vecteurs $\mathbf{u}_3$ et $\mathbf{u}_4$ tels que

$$F = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4).$$

Trouver des vecteurs $\mathbf{u}_3$ et $\mathbf{u}_4$ qui vérifient ces propriétés.

La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est une famille libre de F (resp. de G), sous-espace de dimension trois donc, d'après le Théorème de la base incomplète, il existe un vecteur $\mathbf{u}_3$ (resp. u_4) tel que

$$F = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \quad \textit{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4).$$

❧ *Pour $\mathbf{u}_3$, il s'agit de trouver un vecteur qui vérifie l'équation de F sans vérifier l'équation de G : on aura ainsi un vecteur de F qui n'est pas dans $F \cap G$ et par conséquent*

$$F \cap G \subsetneq (F \cap G) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3) \subset F$$

et en fait

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (F \cap G) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3) = F$$

(inclusion et égalité des dimensions).
On peut y aller au hasard : $\mathbf{u}_3 = (2,1,0,0)$ convient.
❧ *Même démarche pour $\mathbf{u}_4$: le vecteur $(1,-2,0,0)$ convient.*

F - 5. Démontrer que les trois sous-espaces

$$F \cap G, \quad \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3, \quad \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_4$$

sont en somme directe. Quelle est la dimension du sous-espace

$$(F \cap G) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_4) \quad ?$$

Considérons trois vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ tels que

$$\underbrace{\mathbf{v}_1}_{\in F \cap G} + \underbrace{\mathbf{v}_2}_{\in \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3} + \underbrace{\mathbf{v}_3}_{\in \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_4} = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}_{\in F} + \lambda_4 \cdot \underbrace{\mathbf{u}_4}_{\notin F} \\ &= \underbrace{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3}_{\in G} + \lambda_3 \cdot \underbrace{\mathbf{u}_3}_{\notin G} \end{aligned}$$

et comme F et G sont des sous-espaces vectoriels, on en déduit que

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

et donc que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 = 0$. Par conséquent, les trois sous-espaces sont en somme directe.
❧ *La dimension de la somme est donc égale à la somme des dimensions, c'est-à-dire quatre.*
Par inclusion et égalité des dimensions, on en déduit enfin que

$$(F \cap G) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_3) \oplus (\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}_4) = \mathbb{R}^4.$$