Équivalence des normes [40]

La topologie comme prétexte pour réviser les endomorphismes symétriques.

⋆

1./

► Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable et en particulier son spectre est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$. Par conséquent, le rayon spectral

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

est bien défini. Il est maintenant clair que

$$\rho \, : \, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+.$$

► Quel que soit le réel α,

$$\mu \in \mathrm{Sp}(\alpha A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad \mu = \alpha\lambda$$

et en particulier

$$\rho(\alpha A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\alpha\lambda| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\alpha|\,|\lambda| = |\alpha| \cdot \rho(A)$$

donc le rayon spectral est positivement homogène.

REMARQUE.— Si $\alpha \neq 0$ alors, quel que soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, les vecteurs propres de αA associés à $\alpha\lambda$ sont exactement les vecteurs propres de A associés à λ. (C'est évidemment faux pour $\alpha = 0$.)

► Si $\rho(A) = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on en déduit que $A = 0_n$. Donc le rayon spectral sépare les points.

► L'inégalité triangulaire est plus délicate à établir.

▷ Comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, chaque vecteur $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique en une somme

$$X = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} X_\lambda$$

où les colonnes X_λ sont deux à deux orthogonales et

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \quad AX_\lambda = \lambda\, X_\lambda.$$

On déduit du Théorème de Pythagore que

$$\|X\|^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \|X_\lambda\|^2$$

et de la décomposition spectrale de X que

$$AX = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} AX_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda\, X_\lambda.$$

Par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle\, X \,|\, AX \,\rangle = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda\, \|X_\lambda\|^2$$

et par inégalité triangulaire

$$\big|\, \langle\, X \,|\, AX \,\rangle \,\big| \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|\, \|X_\lambda\|^2 \leqslant \rho(A) \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \|X_\lambda\|^2 = \rho(A)\, \|X\|^2.$$

▷ De même, comme $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \left| \langle X | BX \rangle \right| \leqslant \rho(B) \, \|X\|^2.$$

▷ On considère maintenant une valeur propre μ de $(A+B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe en particulier un vecteur propre $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé à cette valeur propre :

$$(A+B)X = \mu X$$

et donc

$$\begin{aligned} |\mu| \, \|X\|^2 = \left| \langle X | \lambda X \rangle \right| &= \left| \langle X | (A+B)X \rangle \right| \\ &= \left| \langle X | AX \rangle + \langle X | BX \rangle \right| && \text{(linéarité à droite)} \\ &\leqslant \left| \langle X | AX \rangle \right| + \left| \langle X | BX \rangle \right| && \text{(inég. triang.)} \\ &\leqslant \left[\rho(A) + \rho(B) \right] \|X\|^2. \end{aligned}$$

Comme $\|X\|^2 > 0$ (puisque X est vecteur propre !), on en déduit que

$$\forall \mu \in \mathrm{Sp}(A+B), \quad |\mu| \leqslant \rho(A) + \rho(B)$$

et, par passage au max,

$$\rho(A+B) \leqslant \rho(A) + \rho(B).$$

2./

Comme A est diagonalisable, elle est semblable à la matrice diagonale

$$\Delta = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1} \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{m_{\lambda_r} \text{ fois}})$$

et comme elle est symétrique, ${}^tAA = A^2$ est semblable à

$$\Delta^2 = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^2}_{m_{\lambda_1} \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_r^2, \ldots, \lambda_r^2}_{m_{\lambda_r} \text{ fois}}).$$

Par conséquent,

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}.$$

Par conséquent, l'application $\|\cdot\|$ considérée ici n'est autre que la norme euclidienne canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ restreinte au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE.— Cette comparaison avec la norme euclidienne canonique **(suggérée par la racine carrée...)** est capitale ! Pour toutes les normes euclidiennes, l'inégalité triangulaire repose en fait sur l'inégalité de Schwarz de telle sorte que, si on ne pense pas à appliquer un théorème du cours sur le produit scalaire, on est condamné à des calculs fastidieux.

3./

► Si on raisonne coefficient par coefficient (c'est-à-dire si on munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$, cf **[22.1]**), alors il est clair que la suite des matrices M_p converge vers la matrice I_n lorsque p tend vers $+\infty$.

► On pourrait aussi calculer $\rho(M_p - I_n)$ sans trop de difficulté.

$$\rho(M_p - I_n) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{k}{p} \right| = \frac{n}{p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

Avec la norme euclidienne vue à la question précédente, il faut un peu d'astuce pour s'épargner les calculs pénibles !

$$\|M_p - I_n\| = \frac{1}{p} \|M_1 - I_n\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

Bref... comme l'annonce la théorie **[35.5]**, peu importe la norme choisie sur l'espace de dimension finie $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, la suite $(M_p)_{p \geqslant 1}$ converge vers la matrice I_n.

► Si on calcule $N(M_p - I_n)$, on ne voit pas de problème : comme la matrice possède n valeurs propres deux à deux distinctes,

$$\forall\, p \geqslant 1, \qquad N(M_p - I_n) = \|M_p - I_n\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

Mais si N était une norme, alors on pourrait déduire de l'inégalité triangulaire que

$$N(M_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} N(I_n).$$

Seulement voilà !

– Comme I_n n'a qu'une seule valeur propre, $N(I_n) = 1$.

– Comme M_p a n valeurs propres deux à deux distinctes,

$$N(M_p)^2 = \|M_p\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2$$

donc $N(M_p) = \mathcal{O}(1/p)$ et donc $N(M_p)$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Cette contradiction prouve que N n'est pas une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.