Équivalence des normes [45]

Exemple de caractérisation de l'intérieur et de l'adhérence d'une partie.

On se place ici dans un espace de dimension infinie : $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ *est l'espace des suites réelles bornées, naturellement muni de la* ***norme uniforme***

$$\forall\, u \in E, \qquad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

La principale difficulté ici consiste à dompter les suites d'éléments de E *lorsque nous allons étudier l'adhérence de* V*. Une suite d'éléments de* E *est en effet une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dont le terme général* u_n *est lui-même une suite réelle...*

⋆

► L'ensemble V des suites nulles à partir d'un certain rang est bien une partie de E puisque toute suite stationnaire est bornée.

▷ La suite identiquement nulle appartient bien à V.

▷ Il reste à vérifier la stabilité par combinaison linéaire, ce qui nous met face à la première subtilité de l'exercice.

Considérons donc deux suites u et v, nulles à partir d'un certain rang. Il existe donc un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_1, \quad u_n = 0$$

et un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ (qui n'a aucune raison d'être égal à N_1) tel que

$$\forall\, n \geqslant N_2, \quad v_n = 0.$$

On pose $N_0 = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$, de telle sorte que : si $n \geqslant N_0$, alors $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant N_2$ et donc

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad u_n = v_n = 0.$$

REMARQUE.— Étape cruciale du raisonnement ! Les termes généraux sont nuls à partir d'un certain rang qui dépend de chaque suite, mais avec deux suites, on a trouvé qui un rang qui convient à ces deux suites. Ce n'est toujours pas *One size fits all*, mais on en approche.

Par conséquent, pour tout scalaire λ,

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad \lambda u_n + v_n = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$$

et V est bien un sous-espace vectoriel de E.

► Considérons un point $x_0 \in V$, c'est-à-dire une suite réelle

$$x_0 = (x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^n, \dots) = (x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

nulle à partir d'un certain rang et supposons que ce point x_0 soit un point de l'**intérieur** de V.

▷ Par définition **[Chap.22 - 30.1 & 15.1]**, il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall\, u \in E, \quad \|u - x_0\|_\infty < r \Longrightarrow u \in V. \tag{1}$$

▷ Comme $x_0 \in V$, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_0^n = 0$ pour tout $n \geqslant N_0$.

▷ Considérons maintenant la suite u_0 définie de la manière suivante :

– pour tout $n < N_0$, on pose $u_0^n = x_0^n$;

– pour tout $n \geqslant N_0$, on pose $u_0^n = r/2$.

Comme la suite u_0 est stationnaire, elle est bornée, donc elle appartient bien à E.

Comme elle tend vers $r/2 > 0$, elle n'appartient pas à V :

$$u_0 \notin V \tag{2}$$

Et pourtant :

– pour $n < N_0$, on a $|u_0^n - x_0^n| = 0$;
– pour $n \geqslant N_0$, on a $|u_0^n - x_0^n| = |r/2 - 0| = r/2$

donc

$$\|u_0 - x_0\|_\infty = r/2 < r. \tag{3}$$

▷ Les trois propriétés (1), (2) et (3) étant contradictoires, on en déduit que notre hypothèse de départ est absurde : la suite x_0 ne peut pas appartenir à l'intérieur de V.

Autrement dit, aucun point x_0 de V n'appartient à l'intérieur de V, soit : l'intérieur de V est vide. (Géométriquement, V est *plat*.)

► Étudions maintenant l'**adhérence** de V. Nous allons procéder par analyse et synthèse.

▷ Dans un premier temps, on choisit une suite réelle bornée $u \in E$ et on suppose qu'elle appartient à l'adhérence de V.

❧ Par **[Chap.22 - 25.3]**, il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V qui converge vers u :

$$\lim_{n\to+\infty} \|u - x_n\|_\infty = 0.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \quad \|u - x_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

❧ Prenons $n = N_\varepsilon$ par exemple.
L'encadrement précédent nous donne :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |u^k - x^k_{N_\varepsilon}| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Comme la suite $x_n = x_{N_\varepsilon}$ appartient à V, il existe un rang $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N'_\varepsilon, \quad x^k_{N_\varepsilon} = 0. \tag{5}$$

La conjonction des propriétés (4) et (5) et l'inégalité triangulaire nous donnent alors :

$$\forall\, k \geqslant N'_\varepsilon, \quad |u^k| \leqslant |u^k - x^k_{N_\varepsilon}| + |x^k_{N_\varepsilon}| \leqslant \varepsilon.$$

❧ Résumons : quel que soit $\varepsilon > 0$, on a justifié l'existence d'un rang $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N'_\varepsilon, \quad |u^k - 0| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, on a démontré que la suite u tendait vers 0 et en fait que l'adhérence de V était contenue dans le sous-espace des suites de limite nulle.

REMARQUE.— On pouvait traiter l'analyse sans aucun calcul, simplement par une connaissance pointue du cours ! En effet,

– les suites u et x_n peuvent être considérées comme des fonctions de $\Omega = \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$;
– la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la limite u peut alors être interprétée comme la convergence uniforme sur Ω de la suite de fonctions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction u ;
– chaque fonction x_n tend vers la limite finie $\ell_n = 0$ au voisinage de $\omega = +\infty$,

et on peut donc déduire du Théorème d'interversion des limites **[Chap.11 - 30]** que

– la fonction limite u tend vers une limite finie au voisinage de $\omega = +\infty$
– et que cette limite est égale à $\lim \ell_n = 0$,

c'est-à-dire que u est une suite de limite nulle.

▷ Réciproquement, considérons une suite de limite nulle u.

❧ Pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, considérons la suite x_n définie par troncature :
– pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $x_n^k = u^k$;
– pour $k > n$, on pose $x_n^k = 0$.

❧ Il est clair que les suites x_n ainsi définies sont toutes nulles à partir d'un certain rang. D'autre part,

$$\|u - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u^k - x_n^k| = \sup_{k>n} |u^k|.$$

❧ Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite u choisie tend vers 0, il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geqslant N_0, \quad |u^k| = |u^k - 0| \leqslant \varepsilon$$

et donc tel que (passage au sup !)

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad \|u - x_n\|_\infty = \sup_{k>n} |u^k| \leqslant \sup_{k \geqslant N_0} |u^k| \leqslant \varepsilon.$$

❧ La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déduite de u par troncature est donc bien une suite d'éléments de V qui converge vers u pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Cela prouve **[Chap.22 - 25.3]** que u est bien dans l'adhérence de V pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

REMARQUE.— L'idée de troncature est très naturelle ! Comment définir une suite de nombres *décimaux* qui converge vers π ? Partez du développement décimal illimité de π (débrouillez-vous pour le trouver !) et tronquez à l'unité, à la première décimale, à la seconde décimale, à la troisième décimale...

► Conclusion : par double inclusion, on a démontré que l'adhérence de V pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ était le sous-espace des suites de limite nulle.