Recherches d'extrema [17.1]

Lorsqu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert, la recherche de ses extrema éventuels commence par l'identification de ses points critiques **[10.2]**.

Dans un second temps, il faut réussir à déterminer la nature des points critiques **[16.3]** *: lieu d'un extremum local, point selle, autre chose encore... Pour cela, il faut passer par un développement limité.*

Dans le cadre du programme actuel, il faut choisir une direction $\mathbf{u}$, étudier $f(M_0 + t \cdot \mathbf{u})$ pour $t \to 0$ et espérer observer un changement de signe pour conclure par la négative (= la fonction f n'atteint pas un extremum au point M_0).

Pour conclure à la présence d'un extremum, il faudrait connaître le développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables (hors programme) et étudier le spectre de la hessienne...

Attention ! Il se peut que la recherche d'extrema sur un ouvert reste vaine : sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ comme sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, une fonction peut très bien n'avoir ni maximum, ni minimum tout en étant continue et bornée (en pareil cas, le sup *n'est pas un* max *et l'*inf *n'est pas un* min*).*

⋆

► La fonction $f = \big[(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy\big]$ est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

En particulier, la fonction

$$\big[x \mapsto f(x, 0) = x^3\big]$$

n'est ni majorée, ni minorée (elle tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et vers $-\infty$ lorsque $x \to -\infty$), donc la fonction f n'a ni maximum global, ni minimum global.

Rien n'interdit en revanche un maximum local (valeur $f(M_0)$ plus grande que toutes les autres valeurs prises par f sur un disque de centre M_0 et de rayon assez petit) ou un minimum local.

► On calcule la jacobienne de f en tout point $M = (x, y)$ de Ω.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = -3x + 3y^2$$

Si la jacobienne est nulle, alors $y = x^2$ et $x = y^2$, donc $y = y^4$ et donc $y = 0$ ou $y = 1$. On en déduit que les seuls points critiques *possibles* de f sont $M_0 = (0, 0)$ et $M_1 = (1, 1)$.

Il suffit de revenir à la jacobienne pour constater que ces deux points sont *effectivement* deux points critiques de f.

► Calculons maintenant la hessienne de f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M) = -3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) = 6y$$

(Inutile d'appliquer le Théorème de Schwarz, on se contente de calculer et de constater, une fois de plus, que Schwarz ne s'est pas trompé.)

On sait (mais H.-P. !) que le développement limité à l'ordre deux au voisinage d'un point $M = (x_0, y_0)$ est donné par

$$\begin{aligned} f(M_0 + \mathbf{h}) = f(M_0) & \\ & + (x - x_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) && \text{(1er ordre)} \\ & + \frac{1}{2}\Big[(x - x_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) \\ & \qquad + 2(x - x_0)(y - y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\ & \qquad + (y - y_0)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\Big] && \text{(2nd ordre)} \\ & + o(\|\mathbf{h}\|^2) && \text{(reste)} \end{aligned}$$

où $\mathbf{h} = (x, y)$ et $\|\mathbf{h}\|^2 = x^2 + y^2$.

On rappelle que le terme du second ordre est la **forme quadratique** associée à la matrice hessienne **[Chap.18 - 28.2 + Chap.21 - 16.2]** :

$$\left[\mathbf{h} \mapsto \langle \mathbf{h} | H \cdot \mathbf{h} \rangle = {}^t\mathbf{h} \cdot H \cdot \mathbf{h}\right]$$

et que la matrice H, **symétrique réelle**, ne demande qu'à être diagonalisée.

▶ **Étude au voisinage de** $M_0 = (0, 0)$

Le point M_0 est un point critique : le terme d'ordre 1 est nul. L'évaluation de la hessienne au point M_0 nous donne alors

$$f(M_0 + \mathbf{h}) = f(M_0) - 3xy + o(x^2 + y^2) = -3xy + o(x^2 + y^2)$$

(avec $M_0 + \mathbf{h} = (x, y)$).

Pour voir si $f(M_0)$ est un extremum, il faut comparer $f(M_0+\mathbf{h})$ à $f(M_0) = 0$, c'est-à-dire étudier le **signe** de $f(M_0 + \mathbf{h})$.

▷ En particulier, lorsque x tend vers 0,

$$f(x, x) \sim -3x^2 \qquad \text{et} \qquad f(x, -x) \sim 3x^2.$$

Cela montre que $f(M_0 + \mathbf{h})$ change de signe et que $f(M_0)$ n'est pas un extremum :

– comme $f(x, x)$ prend des valeurs négatives, $f(M_0) = 0$ *n'est pas un minimum* ;
– comme $f(x, -x)$ prend des valeurs positives, $(M_0) = 0$ *n'est pas un maximum* non plus.

▷ Et la hessienne dans tout ça ? On vient de la diagonaliser (sans faire exprès). En effet, au point M_0,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

donc ses valeurs propres sont $+3$ et -3 et les droites propres associées sont respectivement $\mathbb{R} \cdot (1, -1)$ et $\mathbb{R} \cdot (1, 1)$.

Ce qui n'était qu'une astuce évidente (choisir (x, x) et $(x, -x)$ pour étudier le signe de f) revenait en fait à se déplacer dans les directions propres ! Il faut remarquer **[Chap.18 - 28.2]** qu'on observait des valeurs *positives* dans la direction propre associée à la valeur propre $+3$ et des valeurs *négatives* dans la direction propre associée à la valeur propre -3.

(Et voilà pourquoi on parle à juste titre de *valeurs propres*.)

▶ **Étude au voisinage de** $M_1 = (1, 1)$

On pose encore $\mathbf{h} = (x, y)$ et un calcul purement algébrique (développement, regroupement, simplification) nous donne :

$$\begin{aligned} f(M_1 + \mathbf{h}) = f(1 + x, 1 + y) &= f(1, 1) + 3(x^2 + y^2 - xy) + (x^3 + y^3) \\ &= -1 + 3(x^2 + y^2 - xy) + (x^3 + y^3). \end{aligned}$$

▷ La hessienne au point M_1 est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

et le développement limité à l'ordre 2 devient :

$$f(M_1 + \mathbf{h}) = -1 + \frac{1}{2} \underbrace{\left[6x^2 + 6y^2 - 3xy\right]}_{{}^t\mathbf{h} \cdot H \cdot \mathbf{h}} + o(x^2 + y^2).$$

▷ Diagonalisons la matrice hessienne : ses valeurs propres sont 3 et 9. Comme H est **symétrique réelle**, il existe une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tPHP = \text{Diag}(3, 9)$$

et on note

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On aura reconnu ici la *Formule du changement de base pour les vecteurs* (ici ${}^tP = P^{-1}$), donc u et v sont les coordonnées du vecteur déplacement $\mathbf{h}$ dans la BON des vecteurs propres qu'on a choisie (en définissant P).

En particulier, puisque la base canonique et la base de vecteurs propres choisie sont toutes les deux des BON,

$$\|\mathbf{h}\|^2 = x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

▷ Revenons à la forme quadratique du développement limité.

$$\begin{aligned} q(\mathbf{h}) = {}^t\mathbf{h} \cdot H \cdot \mathbf{h} &= {}^t\mathbf{h} \cdot (P\,{}^tP) H (P\,{}^tP) \cdot \mathbf{h} \qquad (\text{car } P \in O_2(\mathbb{R})) \\ &= {}^t({}^tP \cdot \mathbf{h}) \cdot ({}^tPHP) \cdot ({}^tP \cdot \mathbf{h}) \\ &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= 3u^2 + 9v^2 \\ &\geqslant 3(u^2+v^2) = 3\|\mathbf{h}\|^2 \end{aligned}$$

▷ Et revenons enfin au développement limité lui-même ! Pour $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$,

$$f(M_1 + \mathbf{h}) = \underbrace{-1 + 3u^2 + 9v^2}_{\geqslant -1+3\|\mathbf{h}\|^2} + o(\|\mathbf{h}\|^2).$$

Or $-1 + 3\|\mathbf{h}\|^2 > -1 = f(M_1)$ pour tout $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, donc

$$f(M_1 + \mathbf{h}) > f(M_1)$$

pour tout $\mathbf{h} \neq 0$ et assez petit (plus précisément : assez petit pour que le reste du développement limité soit très inférieur au terme quadratique $3\|\mathbf{h}\|^2$).

On vient ainsi de démontrer que $f(M_1)$ est un minimum local strict :
- *minimum* parce que les autres de f sont plus grandes que $f(M_1)$;
- *local* parce que f n'est pas majorée et prend donc des valeurs (beaucoup) plus grandes que $f(M_1)$;
- *strict* parce qu'à proximité de M_1, la fonction f ne prend que des valeurs strictement supérieures à $f(M_1)$.