Équivalence des normes [22.2]

Comment le Théorème de Bolzano-Weierstrass permet de prouver la compacité d'une partie dans un espace vectoriel de dimension finie.

On est prié de faire attention à l'ordre d'écriture des extractrices !

★

On suppose que l'espace $\mathbb{K}^p$ est muni de la norme produit :

$$\forall x = (x^1, \dots, x^p) \in \mathbb{K}^p, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq p} |x^k|$$

et on considère ici une partie A de $\mathbb{K}^p$, supposée fermée et bornée (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ bien entendu).

Nous allons démontrer que A est une partie compacte de $\mathbb{K}^p$ en revenant à la définition [Chap.22 - 36].

► Considérons donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (x_n^1, \dots, x_n^p) \in A.$$

Comme A est bornée, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\|_\infty \leq M$$

et comme le max est un majorant, on en déduit que

$$\forall 1 \leq k \leq p, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n^k| \leq M.$$

On vient de redémontrer [4] que chaque composante de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

► En particulier, la suite $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée. On peut donc appliquer le Théorème de Bolzano-Weierstrass : il existe une suite extraite

$$(x_{\varphi_1(n)}^1)_{n \in \mathbb{N}}$$

qui converge vers $\ell^1 \in \mathbb{R}$.

Grâce à cette première extraction, on tient la convergence d'une suite extraite pour les premières composantes.

► En tant que suite extraite d'une suite bornée, la suite $(x_{\varphi_1(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On peut aussi lui appliquer le Théorème de Bolzano-Weierstrass : il existe une suite extraite

$$(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{de la suite} \quad (x_{\varphi_1(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

qui converge vers $\ell^2 \in \mathbb{R}$.

De plus, en tant que suite extraite d'une suite qui converge vers ℓ^1 , la suite

$$(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}^1)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{extraite de} \quad (x_{\varphi_1(n)}^1)_{n \in \mathbb{N}}$$

est encore une suite convergente et tend aussi vers ℓ^1 .

Grâce à cette deuxième extraction, on tient la convergence d'une suite extraite pour les deux premières composantes.

► Et on recommence... À chaque étape, le Théorème de Bolzano-Weierstrass nous assure qu'il existe une nouvelle extractrice et en composant les extractrices, on obtient successivement la convergence d'une suite extraite pour les trois premières composantes, pour les quatre premières composantes, etc.

Au terme du processus, en appliquant p fois de suite de le Théorème de Bolzano-Weierstrass, on a obtenu p extractrices et les p suites extraites

$$\begin{aligned} & (x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}^1)_{n \in \mathbb{N}}, \\ & (x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots \\ & (x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}^p)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

convergent vers $\ell^1, \ell^2, \dots, \ell^p$ (il s'agit ici de la convergence des suites réelles, on considère l'espace $\mathbb{R}$ normé par la valeur absolue).

D'après [7.2], la suite extraite

$$(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

converge donc vers $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^p) \in \mathbb{R}^p$ (il s'agit maintenant de l'espace $\mathbb{R}^p$, normé par la norme $\|\cdot\|_\infty$).

► Mais on a aussi supposé que A était fermée. Comme la suite extraite

$$(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ , alors [Chap.22 - 23.8] la limite ℓ appartient aussi à A .

► Nous pouvons conclure : partant d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque d'éléments de A , nous avons prouvé qu'il existait une suite extraite

$$(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

qui convergeait vers un élément ℓ de A , c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possédait au moins une valeur d'adhérence dans A .

Remarques

► Pour établir la compacité de $A \subset E$, il ne suffit pas de prouver l'existence d'une valeur d'adhérence dans E , il faut bien prouver l'existence d'une valeur d'adhérence dans la partie A elle-même [Chap.22 - 36].

Une partie qui est bornée mais pas fermée n'est pas compacte [Chap.22 - 37]. Ainsi, $A =]0, 1]$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ qui n'est pas compacte : la suite de terme général $x_n = \frac{1}{2^n}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $0 \notin A$, donc cette suite a une seule valeur d'adhérence (sa limite : 0), mais elle n'a pas de valeur d'adhérence dans A !

► Il est important de réaliser des extractions successives pour pouvoir conclure. Si on se contente d'observer que les différentes composantes

$$(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$$

sont bornées et de leur appliquer le Théorème de Bolzano-Weierstrass, on pourra en déduire p suites réelles convergentes :

$$(x_{\varphi_1(n)}^1)_{n \in \mathbb{N}}, (x_{\varphi_2(n)}^2)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_{\varphi_p(n)}^p)_{n \in \mathbb{N}}$$

mais on sera incapable d'en déduire une suite extraite dans A car les indices des différentes suites extraites seront sans rapport entre eux !

► Il est aussi important de faire attention à la manière dont sont notées les extractions successives.

La première suite extraite est notée $(x_{\varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

La sous-suite extraite de la première doit bien être notée

$$(x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

(et non pas $x_{\varphi_2 \circ \varphi_1(n)}$ comme on pourrait le croire).

En effet, les indices

$$\varphi_1(\varphi_2(0)), \varphi_1(\varphi_2(1)), \varphi_1(\varphi_2(2)), \varphi_1(\varphi_2(3)) \dots$$

sont extraits de la famille des indices de la première suite extraite

$$\varphi_1(0), \varphi_1(1), \varphi_1(2), \varphi_1(3), \varphi_1(4) \dots$$

alors que ce n'est pas le cas des indices

$$\varphi_2(\varphi_1(0)), \varphi_2(\varphi_1(1)), \varphi_2(\varphi_1(2)), \varphi_2(\varphi_1(3)) \dots$$

(qui figurent parmi $\varphi_2(0), \varphi_2(1), \varphi_2(2) \dots$).