Banque CCP [37]

[1.a]

▶ Démontrons que N_∞ est une norme sur E.

▷ Comme l'application f est continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée, donc $N_\infty(f)$ est bien définie. En tant que borne supérieure d'une fonction positive, il est clair que $N_\infty(f)$ est positive.

▷ Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$. Comme la borne supérieure est un majorant,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \big|f(t)\big| \leqslant N_\infty(f) = 0$$

donc $f = 0_E$. L'application N_∞ sépare les points.

▷ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute $f \in E$,

$$N_\infty(\lambda f) = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda| \cdot \big|f(t)\big| \overset{(\star)}{=} |\lambda| \cdot \sup_{t\in[0,1]} \big|f(t)\big| = |\lambda|\, N_\infty(f)$$

et l'application N_∞ est positivement homogène.

Savoir si l'égalité $(\star)$ doit être détaillée est une grande question ! Le programme est vraiment flou sur ce point et, même si la démonstration (ci-dessous) n'est pas compliquée, elle est quand même assez longue pour qu'on se pose la question de savoir s'il faut, ou non, entrer dans les détails.

Pour $\lambda = 0$, la propriété $(\star)$ est évidente car les deux quantités sont nulles.

Supposons $\lambda \neq 0$ et donc $|\lambda| > 0$.

❧ *Comme le sup est un majorant et que $|\lambda| \geqslant 0$,*

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|\lambda \cdot f(t)\big| = |\lambda| \cdot \big|f(t)\big| \leqslant |\lambda| \cdot N_\infty(f).$$

Le majorant trouvé est indépendant de t. Par passage au sup, on en déduit que

$$N_\infty(\lambda \cdot f) \leqslant |\lambda| \cdot N_\infty(f).$$

Cet encadrement est vrai pour <u>tout</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ et <u>toute</u> fonction $f \in E$.

❧ *Comme $|\lambda| > 0$, on en déduit que*

$$N_\infty(f) = N_\infty\Big(\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot f)\Big) \leqslant \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda \cdot f)$$

(en remplaçant λ par $1/\lambda$ et f par $\lambda \cdot f$ dans l'inégalité précédente).

❧ *On a démontré par double encadrement que $N_\infty(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot N_\infty(f)$.*

▷ Enfin, comme la borne sup est un majorant,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t) + g(t)\big| \leqslant \big|f(t)\big| + \big|g(t)\big| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g).$$

Le majorant est indépendant de t, on peut donc passer au sup dans cette inégalité pour obtenir

$$N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g).$$

▷ L'application N_∞ est bien une norme sur E.

▶ Démontrons que N_1 est une norme sur E.

▷ La fonction $|f|$ est continue et positive sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $N_1(f)$ a bien un sens et est positive.

▷ Si $N_1(f) = 0$, alors l'intégrale d'une *fonction continue et positive* sur $[0,1]$ est nulle. Par conséquent, $\big|f(t)\big| = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, c'est-à-dire $f = 0_E$.

▷ Par linéarité de l'intégrale, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N_1(\lambda \cdot f) = \int_0^1 |\lambda| \cdot \big|f(t)\big|\, dt = |\lambda| \cdot N_1(f).$$

▷ Enfin, par inégalité triangulaire (pour la valeur absolue),

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)+g(t)\big| \leqslant \big|f(t)\big| + \big|g(t)\big|$$

et comme l'intégration conserve les inégalités (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant),

$$N_1(f+g) \leqslant \int_0^1 \big|f(t)\big| + \big|g(t)\big|\,dt = N_1(f) + N_1(g).$$

▷ L'application N_2 est aussi une norme sur E.

[1.b] Comme le sup est un majorant,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \big|f(t)\big| \leqslant N_\infty(f)$$

et comme l'intégration conserve les inégalités,

$$\forall\, f \in E, \quad N_1(f) \leqslant N_\infty(f) = 1 \cdot N_\infty(f). \tag{$\spadesuit$}$$

Le facteur $k = 1 > 0$ convient !

[1.c] Soit $U \subset E$, un ouvert pour la norme N_1. Par définition, pour tout point $f_0 \in U$, il existe un rayon $r(f_0) > 0$ tel que

$$\forall\, f \in E, \qquad N_1(f - f_0) \leqslant r(f_0) \implies f \in U. \tag{$\clubsuit$}$$

Considérons la boule B_∞ de centre f_0 et de rayon $r(f_0) > 0$ pour la norme N_∞. La fonction $f \in E$ appartient à B_∞ si, et seulement si,

$$N_\infty(f - f_0) \leqslant r(f_0).$$

D'après l'inégalité ($\spadesuit$), si $f \in B_\infty$, alors

$$N_1(f - f_0) \leqslant N_\infty(f - f_0) \leqslant r(f_0)$$

et par conséquent $f \in U$ d'après ($\clubsuit$).

Le corrigé officiel propose une variante très abstraite, qui mérite bien quelques précisions.

L'application I_E est linéaire de (E, N_∞) dans (E, N_1) et comme

$$\forall\, f \in E, \quad \underbrace{N_1\big(I_E(f)\big)}_{\text{arrivée}} = N_1(f) \leqslant \underbrace{N_\infty(f)}_{\text{départ}}$$

*on interprète la relation de **[1.c]** comme la continuité de I_E.*

Comme I_E est continue de (E, N_∞) dans (E, N_1), on en déduit que l'image réciproque par I_E de tout ouvert U de l'espace d'arrivée : (E, N_1) est un ouvert V de l'espace de départ : (E, N_∞).

L'identité étant ce qu'elle est, il est clair que $V = U$. Donc tout ouvert U pour la norme N_1 est aussi un ouvert pour la norme N_∞.

[2] Démontrer que les deux normes ne sont pas équivalentes revient ici à démontrer que N_∞ n'est pas dominée par N_1 et pour cela, il suffit de faire preuve d'imagination en appliquant la méthode **[Chap.23 - 28]**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n = [t, t^n]$ est continue sur $[0,1]$ et

$$N_1(f_n) = \frac{1}{n+1} \quad \text{tandis que} \quad N_\infty(f_n) = 1.$$

On en déduit que le quotient $N_\infty(f_n)/N_1(f_n)$ n'est pas majoré et donc que N_∞ n'est pas dominée par N_1.

*Je vous propose une variante géométrique, fondée sur la propriété **[30.5]**. En démontrant qu'une partie ouverte pour N_∞ (bien choisie) n'est pas ouverte pour N_1, on prouve que les normes ne sont pas équivalentes.*

*Par **[Chap.22 - 22.5]**, la boule ouverte*

$$B_\infty = \big[N_\infty(f) < 1\big]$$

est une partie de E *qui est ouverte pour la norme* N_∞*.*

Nous allons vérifier qu'elle n'est pas *ouverte pour la norme* N_1*.*

Le point $f_0 = 0_E$ *appartient à la boule* B_∞ *(c'est son centre !). Supposons que* B_∞ *soit un voisinage de* f_0 *pour la norme* N_1 *: il devrait existe un rayon* $r > 0$ *tel que*

$$N_1(f - f_0) \leqslant r \Longrightarrow f \in B_\infty$$

c'est-à-dire

$$N_1(f) \leqslant r \Longrightarrow N_\infty(f) < 1.$$

Or, quel que soit $n \in \mathbb{N}$*,*

$$f = [t \mapsto r \cdot (n+1) \cdot t^n]$$

vérifie bien $N_1(f) = r$ *alors que* $N_\infty(f) = r \cdot (n+1) \geqslant 1$ *pour tout* $n \geqslant {}^1\!/_r$*.*

On en déduit (par contraposée) qu'il existe au moins un point de B_∞ *(*f_0 *en l'occurrence) pour lequel* B_∞ *n'est pas un voisinage pour la norme* N_1*.*

*Donc, par définition des ouverts **[Chap.22 - 22.1]**,* B_∞ *n'est pas ouvert pour* N_1*.*