Équivalence des normes [35]

On se place ici dans le contexte du **[35]** où l'on compare une norme N sur $\mathbb{K}^d$ à la norme $\|\cdot\|_\infty$ prise comme norme de référence sur cet espace.

[35.4]

► Au **[35.1]**, on a démontré que la norme N était dominée par la norme produit. Il reste donc à démontrer que la norme produit est aussi dominée par la norme N.

REMARQUE.— Comme nous disposons de deux normes sur le même espace vectoriel, nous devrons en permanence préciser pour laquelle de ces deux normes une propriété topologique est établie. C'est lourd, mais la rigueur est à ce prix.

► Notons Σ^1, la sphère unité de $\mathbb{K}^d$ pour la norme produit :

$$x \in \Sigma^1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x\|_\infty = 1.$$

Par **[35.3]**, l'ensemble Σ^1 est une partie compacte de $\mathbb{K}^d$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Par **[35.2]**, l'application

$$N : (\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

est lipschitzienne et en particulier continue.

► Par **[Chap.22 - 64.2]**, une application continue (ici N) sur un compact (ici Σ^1) est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint un minimum : il existe donc un vecteur $x^0 \in \Sigma^1$ tel que

$$\forall\, x \in \Sigma^1, \quad N(x^0) \leqslant N(x).$$

Comme $x^0 \in \Sigma^1$, le vecteur x^0 n'est pas nul et comme N est une norme, alors

$$\alpha = N(x^0) > 0.$$

► Considérons maintenant un vecteur x non nul. Le vecteur $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ appartient à Σ^1, donc

$$N\Big(\frac{x}{\|x\|_\infty}\Big) \geqslant \alpha$$

et par homogénéité de la norme N, on en déduit que

$$\alpha\|x\|_\infty \leqslant N(x).$$

Cette inégalité est évidemment vraie aussi pour le vecteur nul et donc

$$\exists\, a = \frac{1}{\alpha},\ \forall\, x \in \mathbb{K}^d, \quad \|x\|_\infty \leqslant a \cdot N(x)$$

ce qui signifie que la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par la norme N.

► On a ainsi démontré qu'une norme N quelconque sur $\mathbb{K}^d$ était équivalente à la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Par transitivité de la relation d'équivalence, on en déduit que deux normes quelconques sur $\mathbb{K}^d$ sont équivalentes.

[35.5]

► Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base

$$\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d)$$

de E et un isomorphisme $\varphi : \mathbb{K}^d \to E$ défini par

$$\forall\, x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{K}^d, \qquad \varphi(x^1, \dots, x^d) = \sum_{k=1}^{d} x^k \cdot e_k.$$

(C'est une application linéaire et l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^d$ est précisément la base $\mathscr{B}$ que nous avons choisie.)

► Considérons une norme N sur E et posons

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^d, \quad \|x\| = N[\varphi(x)].$$

▷ Il est clair que $\|\cdot\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}_+$.

▷ Par linéarité de φ et homogénéité de N,

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^d,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda \cdot x\| = N[\lambda \cdot \varphi(x)] = |\lambda| \cdot N[\varphi(x)]$$

donc $\|\cdot\|$ est positivement homogène.

▷ Si $N[\varphi(x)] = 0$, alors $\varphi(x) = 0_E$ (car N est une norme sur E et $x = 0_{\mathbb{K}^d}$ car φ est injective. Donc $\|\cdot\|$ sépare les points.

▷ Enfin, par linéarité de φ et inégalité triangulaire (pour N),

$$\forall\, x, y \in \mathbb{K}^d, \quad \|x + y\| = N[\varphi(x) + \varphi(y)] \leqslant N[\varphi(x)] + N[\varphi(y)] = \|x\| + \|y\|.$$

▷ Bref : $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathbb{K}^d$.

► Avec deux normes N_1 et N_2 sur E, on peut définir deux normes sur $\mathbb{K}^d$:

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^d, \quad \|x\|_1 = N_1[\varphi(x)] \quad \text{et} \quad \|x\|_2 = N_2[\varphi(x)].$$

D'après **[35.4]**, les normes sur $\mathbb{K}^d$ sont toutes équivalentes, donc il existe deux scalaires $0 < a < b$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^d, \quad a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1.$$

Comme φ est surjective, pour tout $y \in E$, il existe un $x \in \mathbb{K}^d$ tel que $y = \varphi(x)$ et donc $N_1(y) = \|x\|_1$ et $N_2(y) = \|x\|_2$. D'après l'encadrement précédent,

$$\forall\, y \in E, \quad aN_1(y) \leqslant N_2(y) \leqslant bN_1(y).$$

► On a ainsi démontré que, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes étaient équivalentes.

En pratique, on n'a plus vraiment besoin de préciser pour quelle norme on travaille sur un tel espace, les propriétés topologiques qualitatives sont les mêmes pour toutes les normes **[30]**.

Les propriétés quantitatives, elles, dépendent toujours de la norme choisie. Si, par exemple, la fonction f est 1-lipschitzienne pour la norme N_1, elle sera aussi lipschitzienne pour la norme N_2, mais pour cette seconde norme, la meilleure constante de Lipschitz ne sera pas forcément égale à 1.