
Topologie des EVN [43]

[1.a] Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0, \\ 1/2 & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Il est donc clair que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|$ de convergence en moyenne quadratique.

Rappel : si on ne connaît pas le résultat par cœur, on le retrouve en *linéarisant*.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

[1.b] On suppose que $1 \leq n < p$. D'après [Chap.14 - 87.1] ou [Chap.17 - 8.3],

$$\|f_n - f_p\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f_p\|^2 - 2 \langle f_n | f_p \rangle = 1 - 2 \langle f_n | f_p \rangle.$$

On linéarise à nouveau :

$$\begin{aligned} \langle f_n | f_p \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \cos pt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+p)t + \cos(n-p)t}{2} \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\forall 1 \leq n < p, \quad \|f_n - f_p\| = 1.$$

• S'il existait une suite extraite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui convergerait, alors il existerait une limite $\ell \in E$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_{n_k} - \ell\| = 0.$$

Par inégalité triangulaire, on aurait en particulier

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \|f_{n_{k+1}} - \ell\| + \|\ell - f_{n_k}\|$$

et par encadrement

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 0.$$

Or $1 \leq n_1 \leq n_k < n_{k+1}$ pour tout $k \geq 1$ (par définition des *suites extraites*!), donc

$$\forall k \geq 1, \quad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| = 1$$

ce qui contredit la limite précédente.

Par conséquent, de la suite bornée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on ne peut extraire aucune suite convergente.

[2] La boule unité fermée B de E est fermée [23.11] et bornée (par définition).

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de B qui n'a aucune valeur d'adhérence, donc [Déf.36] la partie B n'est pas compacte.