Topologie des EVN [44]

[1] Soit $x \in E$ (fixé). L'application

$$[y \mapsto d(x, y)]$$

est lipschitzienne

$$\big| d(x,y) - d(x,z) \big| = \big| \|y-x\| - \|x-z\| \big| \leqslant \big\| (y-x) - (x-z) \big\| = \|y-z\|$$

(inégalité triangulaire) et donc continue.

Sur une partie compacte, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes **[64.2]**. En particulier, elle atteint son minimum, donc il existe un élément $y_0 \in K$ tel que

$$d(x, y_0) = \min_{y \in K} d(x, y)$$

et, par définition **[Chap.3 - 12.1]**, $d(x, K) = d(x, y_0)$.

[2] Commençons par "rappeler" la définition :

$$d(K, K') = \inf_{(x,y) \in K \times K'} d(x, y).$$

(Cette définition a un sens car

$$\big\{ d(x, y),\ (x, y) \in K \times K' \big\}$$

est une partie non vide [car ni K, ni K' n'est vide] et minorée [par 0] de $\mathbb{R}$.)

L'application

$$[x \mapsto d(x, K')]$$

est lipschitzienne **[Chap.3 - 13]**, donc elle est continue et sur le compact K, elle atteint son minimum. Il existe donc $x_0 \in K$ tel que

$$d(x_0, K') = \min_{x \in K} d(x, K') = d(K, K').$$

D'après la première question, il existe alors un élément $y_0 \in K'$ tel que

$$d(x_0, K') = d(x_0, y_0)$$

et $d(x_0, y_0) > 0$ car $x_0 \neq y_0$ (puisque $x_0 \in K$, $y_0 \in K'$ et $K \cap K' = \varnothing$).

Conclusion : la distance qui sépare deux compacts disjoints est strictement positive.

REMARQUE.— Si les compacts ne sont pas disjoints, alors il existe $x_0 \in K \cap K'$ et $d(K, K') = 0$ car

$$0 \leqslant d(K, K') \leqslant d(\underbrace{x_0}_{\in K}, \underbrace{x_0}_{\in K'}) = 0.$$

[3] Nous allons maintenant voir que l'hypothèse de compacité était essentielle pour conclure à la question précédente.

On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme produit (pour fixer les idées lors des calculs, cela n'aura aucune influence sur le résultat final).

L'axe des abscisses $A = [y = 0]$ est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ **[23.7]** par l'application continue

$$[(x, y) \mapsto y]\,.$$

Le graphe de la fonction exp :

$$G = [y - \exp(x) = 0]$$

est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue

$$[(x, y) \mapsto y - \exp(x)]\,.$$

Ces deux parties fermées sont disjointes, car si $M = (x, y) \in G$, alors $y = \exp(x) > 0$ et si $M \in A$, alors $y = 0$.

Et pourtant la distance entre ces deux fermés est nulle (à cause de l'asymptote horizontale) :

$$0 \leqslant d(A, G) \leqslant \lim_{x \to -\infty} \Big\| \underbrace{(x, e^x)}_{\in G} - \underbrace{(x, 0)}_{\in A} \Big\|_\infty = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$