Topologie des EVN [45]

[1] Il s'agit de vérifier que la partie $A + B$ est stable par passage à la limite. On considère donc une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A+B$ et on suppose que cette suite converge vers un point $\ell \in E$.

Par définition de $A+B$, pour tout indice $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.

Comme la partie A est compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $u \in A$.

En tant que suite extraite d'une suite convergente de limite ℓ, la suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

En tant que différence de deux suites convergentes, la suite de terme général

$$y_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k}$$

est convergente, de limite $\ell - u$.

Or tous les y_{n_k} appartiennent à B et B est une partie fermée, donc la limite $(\ell - u)$ appartient encore à B.

Ainsi

$$\ell = \underbrace{u}_{\in A} + \underbrace{(\ell - u)}_{\in B} \in A + B.$$

On a démontré que $(A + B)$ était stable par passage à la limite.

[2] Si B est compact, alors B est fermé **[38.1]**, donc on étudie ici un cas particulier du résultat précédente, mais le plan de la démonstration n'a plus rien à voir : on considère ici une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(A + B)$ et on cherche à démontrer que cette suite possède une valeur d'adhérence qui appartient bien à $(A + B)$.

Puisque tous les x_n appartiennent au compact A, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $u \in A$.

Puisque tous les $y_{\varphi(n)}$ appartiennent au compact B, il existe une sous-suite extraite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $v \in B$.

En tant que suite extraite d'une suite qui converge vers u, la sous-suite extraite $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers u.

Par conséquent, la suite extraite de terme général

$$z_{\varphi\circ\psi(n)} = x_{\varphi\circ\psi(n)} + y_{\varphi\circ\psi(n)}$$

converge vers $u+v \in A+B$, ce qui nous prouve bien que $(A+B)$ est compacte.

REMARQUE.— On aurait pu aller plus vite : comme A et B sont des parties compactes de E, alors $A \times B$ est une partie compacte de $E \times E$ **[Chap.23 - 13]** et $A + B$ est une partie compacte de E **[64.1]** en tant qu'image (directe) du compact $A \times B$ par l'application

$$[(x, y) \mapsto x + y]$$

qui est une application continue de $E \times E$ dans E **[Chap.23 - 17]**.