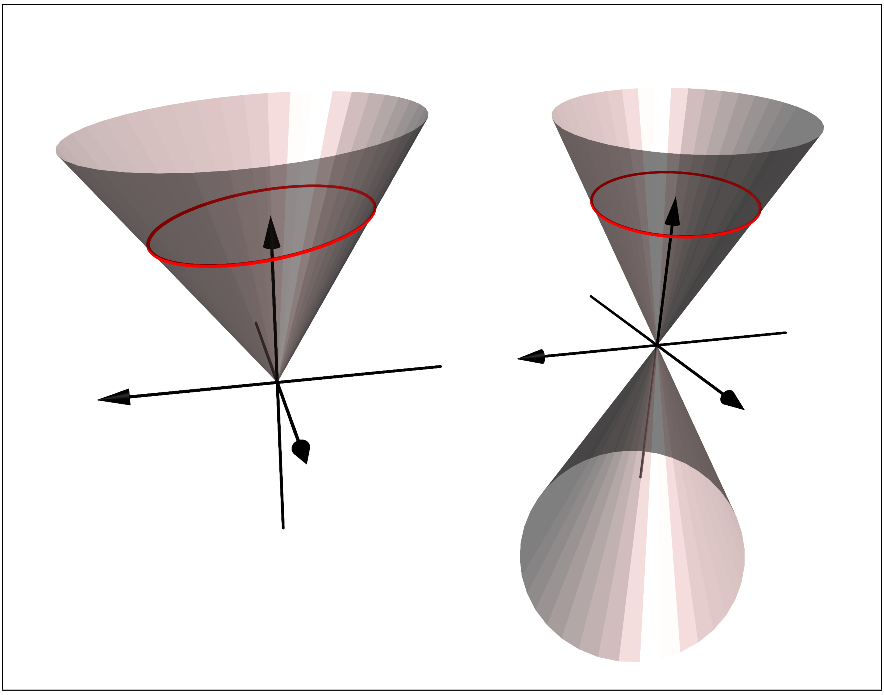
Topologie des EVN [46]

Une remarque préliminaire sur le vocabulaire : pour $x \in K$ fixé (non nul !), l'ensemble des points de E de la forme $\lambda \cdot x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est la demi-droite issue de l'origine et dirigée par le vecteur x. L'ensemble F est donc l'ensemble des *demi-droites* issues de O et dirigée par un vecteur de K, c'est ce qu'on appelle un **cône positif** (figure de gauche).

Le **cône** construit sur K est l'ensemble des *droites* vectorielles dirigées par un vecteur de K (figure de droite).



► Pour montrer que F est un fermé, nous considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de F en supposant que cette suite converge vers une limite $\ell_0 \in E$. Il s'agit maintenant de démontrer que $\ell_0 \in F$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur u_n appartient à F, donc il existe un scalaire $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ et un vecteur $x_n \in K$ tels que $u_n = \lambda_n \cdot x_n$.

Comme K est compact, il existe une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in K$.

En tant que suite extraite d'une suite de limite ℓ_0, la sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ_0.

Comme le vecteur nul n'appartient pas à K et que les scalaires λ_n sont tous positifs,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \frac{\|u_n\|}{\|x_n\|}$$

et en particulier

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{n_k} = \frac{\|u_{n_k}\|}{\|x_{n_k}\|}$$

donc **[Chap.3 - 21.2]**

$$\lambda_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\|\ell_0\|}{\|\ell\|} \stackrel{\text{not.}}{=} \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

On en déduit que

$$\ell_0 = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} \cdot x_{n_k} = \underbrace{\alpha}_{\in\mathbb{R}_+} \cdot \underbrace{\ell}_{\in K} \in F$$

ce qu'il fallait démontrer.

▶ La partie K est une parabole : c'est le graphe de la fonction $[x \mapsto x^2]$. Il s'agit bien d'une partie fermée, puisque c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue (polynomiale !)

$$\left[(x_1, x_2) \mapsto x_2 - x_1^2\right].$$

En revanche, cette partie n'est pas bornée puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n = (n, n^2) \in K \qquad \text{et} \qquad \|P_n\|_\infty = n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Donc K n'est pas compacte **[38.1]**.

▷ Si $u = (x, y) \in F$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(x_1, x_2) \in K$ tels que

$$(x, y) = \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_1^2).$$

Si $\lambda = 0$ ou $x_1 = 0$, alors $(x, y) = (0, 0)$.
Si au contraire $\lambda > 0$ et $x_1 \neq 0$, alors $x = \lambda x_1 \neq 0$ et $y = \lambda x_1^2 > 0$.
On a ainsi démontré que

$$F \subset \big\{(0,0)\big\} \cup \big([x \neq 0] \cap [y > 0]\big).$$

Réciproquement, $(0, 0) = 0 \cdot (1, 1^2) \in F$ d'une part et, d'autre part, si $x \neq 0$ et $y > 0$, alors on pose

$$x_1 = \frac{y}{x} \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{x^2}{y} > 0$$

et on a bien

$$(x, y) = \lambda \cdot (x_1, x_1^2) \in F.$$

Par double inclusion, on a donc démontré que

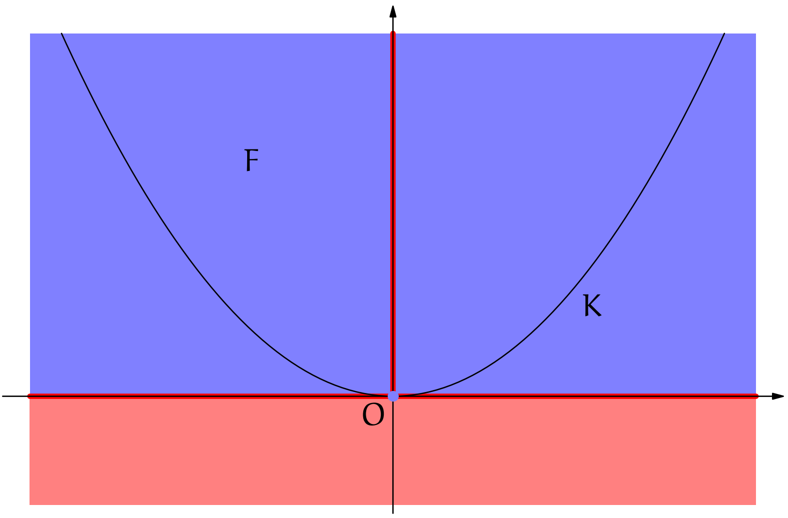
$$F = \big\{(0,0)\big\} \cup \big([x \neq 0] \cap [y > 0]\big).$$

▷ Cet ensemble F n'est pas fermé pour la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. En effet, pour tout indice $n \geqslant 1$, le point

$$M_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$$

appartient à F. Lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point $L = (1, 0)$ qui n'appartient plus à F.

Comme F n'est pas stable par passage à la limite, on en déduit que F n'est pas fermé.



REMARQUE.— L'ensemble F n'est pas ouvert non plus, car $(0, 0)$ est un point de F mais F n'est pas un voisinage de $(0, 0)$ (figure !).