► Comme la fonction f est bornée (sous entendu : sur E tout entier), les deux bornes supérieures ont bien un sens.

► On sait que $A \subset \overline{A}$ **[24.3]**, donc

$$V \overset{\text{not.}}{=} \left\{\|f(x)\|_F,\ x \in A\right\} \subset \left\{\|f(x)\|_F,\ x \in \overline{A}\right\} \overset{\text{not.}}{=} V'$$

et par conséquent **[Chap.2 - 9]**,

$$\sup_{x\in A} \|f(x)\|_F \leqslant \sup_{x\in \overline{A}} \|f(x)\|.$$

► Réciproquement, soit $x_0 \in \overline{A}$. Par **[25.3]**, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x_0 et, d'après le Théorème de composition des limites **[50]**,

$$\|f(u_n)\|_F \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|f(x_0)\|$$

puisque f est supposée continue.

Comme la borne sup est un majorant et que tous les u_n appartiennent à A,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f(u_n)\|_F \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F$$

et comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on vient de démontrer que

$$\forall\, x_0 \in \overline{A}, \qquad \|f(x_0)\|_F \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

Le majorant trouvé est indépendant de x_0, on peut donc passer à la borne supérieure et en déduire que

$$\sup_{x_0\in \overline{A}} \|f(x_0)\| \leqslant \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

► L'égalité cherchée est donc démontrée par double-inclusion.