Banque CCP [38]

[1.a] Une famille *finie* de réels positifs possède un plus grand élément, donc

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$$

existe bien et c'est bien sûr un réel positif.

Mais cela ne prouve pas que $N_\infty(P)$ existe ! *En effet, il y a une infinité de choix possibles pour n et il faut aussi vérifier que $N_\infty(P)$ ne dépend pas de ce choix !*

Quel que soit $n \geqslant \deg P$, on a $a_i = 0$ pour tout indice $\deg P < i \leqslant n$, donc

$$\forall\, n > \deg P, \quad \big\{|a_i|,\ 0 \leqslant i \leqslant n\big\} = \big\{|a_i|,\ 0 \leqslant i \leqslant 1 + \deg P\big\}.$$

Ni le maximum, ni la somme ne dépendent de n, ce qui légitime les définitions de $N_\infty(P)$ et $N_1(P)$.

*Pour les autres propriétés, la démarche est la même que pour **[CCP 37]**, avec la même interrogation : jusqu'où faut-il entrer dans les détails pour justifier l'homogénéité de N_∞ ?*

[1.b] Soit $U \subset \mathbb{R}[X]$, un ouvert pour la norme N_∞.

Cela signifie **[Chap.22 - 22]** que, pour tout point $P_0 \in U$, il existe un rayon $r_0 = r_0(P_0) > 0$ tel que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad N_\infty(P - P_0) \leqslant r \Longrightarrow P \in U.$$

Or $N_\infty(P - P_0) \leqslant N_1(P - P_0)$ quel que soit P. Donc : si $N_1(P - P_0) < r_0$, alors on a aussi $N_\infty(P - P_0) < r_0$ et donc $P \in U$.

Cela signifie que la boule de centre P_0 et de rayon r_0 (pour la norme N_1) est contenue dans U, de telle sorte que U est un voisinage de P_0 (pour la norme N_1).

Cela vaut pour tout point $P_0 \in U$, donc U est aussi un ouvert de $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N_1.

*Comme on l'a vu en détail au **[CCP 37]**, il est techniquement plus simple de comparer les deux normes et d'en déduire le résultat en invoquant le théorème sur l'image réciproque d'un ouvert par une application continue (l'identité). Mais il faut alors faire attention à ne pas mélanger l'espace de départ et l'espace d'arrivée !*

Ici comme ailleurs, choisissez la méthode qui vous convient le mieux.

Il est clair que

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad N_\infty\big(\mathrm{Id}(P)\big) = N_\infty(P) \leqslant N_1(P)$$

ce qui prouve que l'application linéaire

$$\mathrm{Id}\ :\ (\mathbb{R}[X], N_1) \longrightarrow (\mathbb{R}[X], N_\infty)$$

est continue.

L'image réciproque d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}[X]$ pour la norme N_∞ (espace d'arrivée) est donc un ouvert pour la norme N_1 (espace de départ) et il est clair que l'image réciproque de U par Id est égale à U lui-même.

[1.c] On a constaté facilement que la norme N_∞ était dominée par la norme N_1. Il s'agit donc maintenant de démontrer que la réciproque est fausse, en suivant la méthode **[Chap.23 - 28]**.

Nous cherchons une suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que (par exemple) les valeurs de $N_1(P_k)$ deviennent de plus en plus grandes tandis que la valeur de $N_\infty(P_k)$ reste constante.

Les polynômes

$$P_k = 1 + X + X^2 + \cdots + X^k$$

conviennent parfaitement : $N_\infty(P_k) = 1$ et $N_1(P_k) = (k+1)$!

[2] La restriction d'une norme à un sous-espace est évidemment une norme (à valeurs positives ✔ ; qui sépare les points ✔ ; positivement homogène ✔ ; inégalité triangulaire ✔).

Le sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ est un espace de dimension finie. Sur cet espace, *toutes* les normes sont équivalentes et en particulier les restrictions N'_1 et N'_∞.

*On peut aussi répondre sans argument théorique, par un simple encadrement (modifier légèrement **[Chap.23 - 31]**).*