Topologie des EVN [68]

On étudie ici une application *linéaire* $f : E \to F$.

▶ Si $f : E \to F$ est continue, alors $\|f\|_F : E \to \mathbb{R}$ est continue **[54]** et

$$A = \big\{x \in E : \big\|f(x)\big\|_F = 1\big\}$$

est l'image réciproque du fermé $\{1\} \subset \mathbb{R}$ **[23.7]** par une application continue ($\|f\|_F$), donc A est une partie fermée de E **[60]**.

▶ *Il s'agit évidemment d'exploiter le Théorème [57], en particulier le fait qu'une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée au voisinage de l'origine :*

$$\exists\, M > 0,\ \exists\, r > 0,\ \forall\, x \in E,\quad \|x\|_E \leqslant r \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant M. \tag{1}$$

Nous allons procéder par contraposée.

▷ Si l'application *linéaire* f n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de 0_E, c'est-à-dire :

$$\forall\, M > 0,\ \forall\, r > 0,\ \boxed{\exists\, x \in E,} \qquad \begin{cases} \|x\|_E \leqslant r, \\ \|f(x)\|_F > M. \end{cases} \tag{2}$$

Remarque.— *La propriété* (2) *est la* négation formelle *de la propriété* (1)*.*

On peut raisonner par analogie, comme s'il s'agissait d'événements d'une tribu : dire que l'événement B est une conséquence de l'événement A se traduit en algèbre booléenne par

$$A \subset B,$$

c'est-à-dire par

$$A \cap B^c = \varnothing.$$

(On vient d'exprimer la contraposée.)

La propriété contraire se traduit donc par

$$A \cap B^c \neq \varnothing$$

et donc par le fait qu'il existe au moins un $x \in E$ pour lequel l'intersection $A \cap B^c$ est réalisée.

▷ *Puisqu'on peut choisir librement $M > 0$ et $r > 0$, nous allons choisir ce qui est le plus contraignant : le minorant M de plus en plus grand et le rayon r de plus en plus petit.* Pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe donc un vecteur $x_n \in E$ tel que

$$\|x_n\|_E \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \|f(x_n)\|_F > n.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0_E et pourtant la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée, cqfd.

▶ Puisqu'on suppose ici que l'application linéaire f n'est pas continue, nous reprenons la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de la question précédente et nous posons

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad y_n = \frac{x_n}{\|f(x_n)\|_F}$$

(le dénominateur est strictement supérieur à 1, on ne risque pas de diviser par zéro). Par linéarité de f et homogénéité de $\|\cdot\|_F$,

$$\big\|f(y_n)\big\|_F = \left\|\frac{f(x_n)}{\|f(x_n)\|_F}\right\|_F = 1$$

donc $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de A.

Il faut voir la définition des y_n comme un moyen naturel *de construire une suite d'éléments de A.*

D'autre part, par construction de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \|y_n - 0_E\|_E = \left\| \frac{x_n}{\|f(x_n)\|_F} \right\|_E = \frac{\|x_n\|_E}{\|f(x_n)\|_F} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

Et comme $f(0_E) = 0_F$ par linéarité de f, la limite de la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ n'appartient pas à A.

L'ensemble A n'est donc pas stable par passage à la limite, ce n'est donc pas un fermé de E.