▶ La propriété
$$u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha \cdot v^n \tag{HR_n}$$
est vraie pour $n = 0$ par hypothèse.

Si la propriété (HR_n) est vérifiée pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\begin{aligned}
(n+1)\alpha \cdot v^{n+1} &= (u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u) \circ v && \text{(composition par } v\text{)}\\
&= u \circ v^{n+2} - v^{n+1} \circ (u \circ v)\\
&= u \circ v^{n+2} - v^{n+1} \circ (v \circ u + \alpha I_E) && (\mathrm{HR}_1)\\
&= u \circ v^{(n+1)+1} - v^{(n+1)+1} \circ u - \alpha \cdot v^{n+1}
\end{aligned}$$
et donc
$$u \circ v^{(n+1)+1} - v^{(n+1)+1} \circ u = [(n+1)+1]\alpha \cdot v^{n+1},$$
ce qui prouve que la propriété (HR_n) est bien fondée et héréditaire.

La propriété (HR_n) est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▶ *La suite de l'exercice était facile à traiter avec l'ancien programme, en utilisant la norme d'application linéaire continue. Je donne dans un premier temps l'ancienne preuve et je montre ensuite comment l'adapter dans le cadre du nouveau programme. (Ce sont les mêmes idées, mais cela demande une maîtrise technique bien supérieure : au lieu d'appliquer une recette vue en cours, il faut inventer la recette et le cours qui va avec !)*

▶ L'espace vectoriel $L_c(E)$ des endomorphismes continus de E est normé par
$$|||u||| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|.$$
La **norme d'application linéaire continue** $|||\cdot|||$, dite aussi **norme subordonnée à la norme** $\|\cdot\|$ sur E, est une norme d'algèbre :
$$\forall\, u, v \in L_c(E), \qquad |||u \circ v||| \leqslant |||u|||\,|||v|||.$$
Par homogénéité et inégalité triangulaire, on déduit de (HR_n) que
$$(n+1)\,|\alpha|\,|||v^n||| \leqslant |||u|||\,|||v^{n+1}||| + |||v^{n+1}|||\,|||u||| \leqslant 2|||u|||\,|||v|||\,|||v^n|||.$$
Par conséquent : ou bien v est nilpotent, ou bien
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\alpha \leqslant 2|||u|||\,|||v|||$$
et dans ce cas, $\alpha = 0$.

▶ *La variante qui suit est conforme au programme actuel. Cette variante contourne la notion de norme subordonnée en faisant usage du* ***[Thm 57]*** *et surtout du* ***[Chap.3 - Thm 43]****, qui relie la continuité d'une application linéaire avec son comportement sur la boule unité.*

▷ Comme $u \in L(E)$ est un endomorphisme continu, il est borné sur la boule unité B_1 de E et il existe donc un réel $U > 0$ tel que
$$\forall\, x \in B_1, \qquad \|u(x)\| \leqslant U.$$
Une composée d'endomorphismes continus est encore un endomorphisme continu (Théorème de composition des limites) donc, pour tout $n \geqslant 1$, il existe de même un réel $V_n > 0$ tel que
$$\forall\, x \in B_1, \qquad \|v^n(x)\| \leqslant V_n.$$

REMARQUE.— *Par définition, U est un majorant de $|||u|||$ et V_n, un majorant de $|||v^n|||$. Il me paraît bien difficile de penser à introduire ces deux majorants si on n'a jamais entendu parler de norme subordonnée...*

▷ Soient $x \in B_1$ et $n \geqslant 1$. Par (HR_n) et inégalité triangulaire,

$$(n+1)|\alpha| \, \|v^n(x)\| \leqslant \left\|(u \circ v)\big(v^n(x)\big)\right\| + \left\|v^n\big((v \circ u)(x)\big)\right\|. \qquad (\star)$$

▷ Comme $x \in B_1$, alors $\|u(x)\| \leqslant U$, donc

$$\frac{u(x)}{U} \in B_1,$$

donc

$$\left\|v\left(\frac{u(x)}{U}\right)\right\| \leqslant V_1$$

et donc (linéarité de v et homogénéité de la norme)

$$\|(v \circ u)(x)\| \leqslant V_1.U.$$

Le même raisonnement nous amène à :

$$\|(v^{n+1} \circ u)(x)\| = \|v^n\big((v \circ u)(x)\big)\| \leqslant V_n.V_1.U$$

et aussi à :

$$\|(u \circ v^{n+1})(x)\| \leqslant U.V_1.V_n.$$

▷ La relation $(\star)$ nous donne alors

$$\forall\, x \in B_1, \quad (n+1)|\alpha| \, \|v^n(x)\| \leqslant 2U.V_1.V_n$$

Comme le majorant ne dépend pas de $x \in B_1$, on peut passer au sup par rapport à x.

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad (n+1)|\alpha| \, V'_n \leqslant 2U.V_1.V_n$$

où

$$V'_n = \sup_{x \in B_1} \|v^n(x)\|.$$

▷ Revenons à la définition de V_n : on a choisi un majorant strictement positif de $\|v^n(x)\|$ lorsque x parcourt B_1.

❧ Si $V'_n > 0$, on peut donc très bien supposer que $V_n = V'_n > 0$ et on arrive alors à

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad (n+1)|\alpha| \leqslant 2U.V_1.$$

Le majorant est constant (indépendant de n), le facteur $(n+1)$ tend vers $+\infty$: il faut donc que $\alpha = 0$ dans ce cas.

❧ Si au contraire $V'_n = 0$, alors v^n est identiquement nulle sur la boule unité de E et, par homogénéité, v^n est identiquement nulle sur E tout entier. Cela signifie que v est nilpotent d'indice inférieur à n.

▷ On peut alors conclure comme plus haut : ou bien v est nilpotent, ou bien $\alpha = 0$.

REMARQUE.— *Comme on suppose que les applications linéaires sont continues, on sous-entend que l'espace E n'est pas un espace de dimension finie !*

En effet, si E est un espace de dimension finie,

- *tous les endomorphismes de E seraient continus* ***[Chap.23 - 36]*** *;*
- *on pourrait aussi raisonner sur le nombre fini de valeurs propres pour conclure* ***[Chap.10 - 186]****.*