Topologie des EVN [62]

*Voir aussi le corrigé du **[68]** pour plus de détails.*

[1.] Par **[Chap.3 - 43]**, une application linéaire est continue si, et seulement si, elle est bornée sur la sphère unité.

Si $f \in L(E, \mathbb{R})$ n'est pas continue, elle n'est pas bornée sur la sphère unité, donc il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires telle que

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Pour n assez grand, on en déduit que $f(u_n) > 0$ et en posant

$$x_n = \frac{u_n}{f(u_n)}$$

on construit une suite de vecteurs telle que

$$\|x_n\| = \frac{\|u_n\|}{|f(u_n)|} = \frac{1}{f(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(homogénéité de la norme) avec aussi

$$f(x_n) = \frac{f(u_n)}{f(u_n)} = 1$$

(linéarité de f).

On a donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers le vecteur nul et telle que $f(x_n) = 1$ pour tout n.

[2.] On suppose toujours que f n'est pas continue et on reprend la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question précédente.

La suite de terme général

$$y_n = x_n - x_0$$

est une suite de vecteurs du noyau de f :

$$f(y_n) = f(x_n) - f(x_0) = 1 - 1 = 0$$

qui converge vers $-x_0$:

$$\|y_n - (-x_0)\| = \|x_n\| = \frac{1}{f(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Et pourtant $f(-x_0) = -f(x_0) = -1 \neq 0$, donc la limite $(-x_0)$ n'appartient pas au noyau de f, ce qui montre que $\operatorname{Ker} f$ n'est pas fermé.

► Réciproquement, supposons que f soit continue. Alors la définition

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \;:\; f(x) = 0\}$$

montre que le noyau de f est l'image réciproque du fermé $\{0_E\}$ par l'application continue f et donc que $\operatorname{Ker} f$ est un fermé de E.

► Conclusion de cette discussion : une *forme* linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

► **Complément culturel.**

Le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle est un hyperplan de E. On peut vérifier (exercice : **[Chap.22 - 40.(10)]** que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel. On a donc ici :

$$\operatorname{Ker} f \subset \overline{\operatorname{Ker} f} \subset E.$$

Comme $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan, il n'y a donc que deux possibilités, mutuellement exclusives :

- ou bien $\operatorname{Ker} f = \overline{\operatorname{Ker} f} \subsetneq E$ et, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f$ est fermé, c'est le cas où f est continue ;
- ou bien $\operatorname{Ker} f \subsetneq \overline{\operatorname{Ker} f} = E$ et, dans ce cas, $\operatorname{Ker} f$ est dense dans E, c'est le cas où f n'est pas continue.

Il est difficile de se représenter géométriquement cette alternative, car en dimension finie, seul le premier cas a lieu.