Topologie des EVN [64]

Méthode typique pour prouver qu'une partie est compacte.

On considère une application continue $f : E \to F$ et une partie compacte $K \subset E$. L'image (directe) de K par f est définie par

$$f_*(K) = \{f(x),\ x \in K\}$$

et nous allons démontrer que $f_*(K)$ est une partie compacte de F.

Pour cela, on considère une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f * (K)$. Par définition (rappelée ci-dessus), pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$.

Comme K est une partie compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$.

Comme f est continue (sur E et en particulier au point $\ell \in K$),

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell)$$

(Théorème de composition des limites).

Comme $\ell \in K$, alors $f(\ell) \in f_*(K)$. On a ainsi démontré qu'il existait une suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergeait vers une limite $f(\ell) \in f_*(K)$.

Ainsi, toute suite d'éléments de $f_*(K)$ possède une valeur d'adhérence dans $f_*(K)$, ce qui signifie **[Déf. 36]** que $f_*(K)$ est une partie compacte de F.