Topologie des EVN [65]

Méthode typique pour exploiter la compacité d'une partie.

▶ *La fonction* f *est* ***uniformément continue sur*** K *si, et seulement si,*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, y \in K, \quad \|x - y\|_E \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon.$$

▶ Nous allons procéder par contraposée et pour cela, nous commençons par écrire la négation de l'expression formelle précédente. Nous supposons donc que :

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, x_\alpha, y_\alpha \in K, \quad \begin{cases} \|x_\alpha - y_\alpha\|_E \leqslant \alpha \\ \|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)\|_F > \varepsilon_0. \end{cases}$$

Voir le corrigé ***[68]*** *pour plus de détails.*

▶ Conservons le réel $\varepsilon_0 > 0$ qui nous est donné par l'hypothèse de travail et puisque nous pouvons choisir librement α, choisissons α en imposant des contraintes de plus en plus fortes : pour tout $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = 2^{-n} > 0$.

Pour chaque valeur de $n \in \mathbb{N}$, il existe alors deux éléments x_n et y_n de K tels que

$$\|x_n - y_n\|_E \leqslant 2^{-n} \quad \text{et} \quad \big\|f(x_n) - f(y_n)\big\|_F > \varepsilon_0.$$

▶ Comme tous les x_n appartiennent à K et que K est compact, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in K$.

Par inégalité triangulaire (et astuce taupinale),

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|y_{n_k} - \ell\|_E \leqslant \underbrace{\|y_{n_k} - x_{n_k}\|_E}_{\leqslant 1/2^{n_k}} + \underbrace{\|x_{n_k} - \ell\|_E}_{\to 0}$$

donc la suite extraite $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ.

▶ Comme f est continue sur E, elle est en particulier continue au point ℓ et, par composition de limites,

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell) \quad \text{et} \quad f(y_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(\ell)$$

ce qui prouve en particulier que

$$\big\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big\|_F \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Mais cela contredit la propriété établie plus haut :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \big\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\big\|_F \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

▶ Notre hypothèse de travail est donc fausse et nous pouvons conclure : si f est continue sur E, alors la restriction de f à un compact $K \subset E$ est uniformément continue.