MPSI 2 - Semaine 23

A.

A - 1. On suppose que la matrice A est diagonale. Que dire de la matrice A^k pour $k \in \mathbb{N}$? *(On attend la réponse la plus détaillée possible, mais pas de démonstration.)*

A - 2. On suppose que la matrice A est triangulaire. Que dire de la matrice A^k pour $k \in \mathbb{N}$? *(On attend la réponse la plus détaillée possible, mais pas de démonstration.)*

A - 3. On suppose que la matrice A est symétrique. *Démontrer par récurrence* que A^k est symétrique pour tout $k \in \mathbb{N}$.

⋆

B.

B - 1. Soient A et B, deux matrices symétriques telles que

$$AB = BA.$$

Démontrer que AB est symétrique.

B - 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

⋆

C. Soit f, une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

C - 1. On note A, la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la taille de la matrice A ? (nb de lignes, nb de colonnes)

C - 2. On considère les vecteurs

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (1, 0, 1), \quad w = (0, -1, 1).$$

Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de passage Q de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Que dire du noyau de la matrice Q ? de son image ?

C - 3. Quelle est la matrice de la forme linéaire f relative à la base $\mathscr{B}$? (On citera précisément le théorème appliqué avant de poser les calculs.)

C - 4. On considère le plan $P \subset \mathbb{R}^3$ représenté par l'équation

$$2x + 3y - z = 0$$

dans la base canonique. Par quelle équation ce plan est-il représenté dans la base $\mathscr{B}$?

⋆

D. Soient u, un endomorphisme de E et x, un vecteur de E. On suppose qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x) = \lambda \cdot x.$$

D - 1. Dans cette question, on suppose que $\lambda \neq 0$. Démontrer que $x \in \operatorname{Im} u$.

D - 2. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et que la matrice de u relative à la base canonique est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Quels sont les vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = 0 \cdot x$? Ces vecteurs appartiennent-ils à l'image de u ?
D - 3. Mêmes questions avec la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\star$

E. Soit E, un espace vectoriel. On suppose connus deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E :
$$E = F \oplus G$$
et un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que
$$\forall\, x \in F, \quad u(x) = 2x \quad \text{et} \quad \forall\, y \in G, \quad u(y) = -y.$$
E - 1. Soit $z \in E$. Démontrer qu'il existe deux vecteurs $x \in F$ et $y \in G$ tels que
$$z = x + y.$$
Y a-t-il unicité du couple (x, y) ? Exprimer $u(z)$ en fonction de x et y.
E - 2. On considère deux vecteurs $x \in F$ et $y \in G$ et on suppose qu'aucun de ces vecteurs n'est égal à 0_E. Démontrer que la famille (x, y) est libre.
E - 3. Soit $z \in E$, un vecteur tel que $u(z) = 2 \cdot z$. Démontrer que $z \in F$.
E - 4. Avec les notations de **E - 1.** , démontrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u^k(z) = 2^k \cdot x + (-1)^k \cdot y.$$
L'endomorphisme u est-il un projecteur ?

$\star$

F. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère le plan P représenté dans la base canonique par l'équation
$$[2x - y + z = 0]$$
et les deux droites vectorielles
$$D_0 = \mathbb{R} \cdot (1, 1, -1) \quad \text{et} \quad D_1 = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1).$$
F - 1. Les sous-espaces D_0 et P sont-ils supplémentaires dans E ?
F - 2. Démontrer que les sous-espaces D_1 et P sont supplémentaires dans E.
F - 3. Soit $u = (x, y, z) \in E$. On note $p(u)$, le projeté du vecteur u sur le plan P parallèlement à la droite D_1. Rappeler la définition du vecteur $p(u)$.

F - 4. On note A, la matrice qui représente la projection p dans la base canonique de E. *(On ne demande pas encore de calculer cette matrice.)*
Que sait-on de la trace et du rang de cette matrice ? Quelle relation de liaison existe-t-il entre les colonnes de cette matrice ?
F - 5. Calculer une base de P. En déduire une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

F - 6. Calculer la matrice A.

$\star$

G. On étudie ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

G - 1. Calculer le rang et la trace de A.
G - 2. Calculer une base de $\operatorname{Im} A$.
Démontrer que $\operatorname{Ker} A$ est un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.
G - 3. Calculer une ligne

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

telles que

$$CL = A \qquad \text{où} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit LC et en déduire que

$$A^2 = -3A.$$

G - 4. On considère la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de Q et en déduire que Q est inversible. Démontrer *sans calcul* que

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire enfin que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$