Topologie des EVN [66]

Le problème fondamental dans un espace préhilbertien est le ***problème du supplémentaire orthogonal [Chap.17 - 33]*** *: quel que soit le sous-espace F de E,*

$$F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} \subset E \tag{$\star$}$$

mais cette inclusion est-elle stricte ou masque-t-elle une égalité ?

L'enjeu est d'importance : la projection orthogonale sur F est définie si, et seulement si, il y a égalité !

On a résolu ce problème dans un cas particulier simple : si F est un espace de dimension finie, alors l'inclusion $(\star)$ est en fait une égalité ***[Chap.17 - 64]****.*

En revanche, si la dimension F est infinie, il arrive que l'inclusion $(\star)$ soit stricte ***[Chap.17 - 51, 81-83]****.*

► Commençons par démontrer que, quel que soit le sous-espace F, son orthogonal $F^{\perp}$ est toujours fermé.

▷ D'après la définition,

$$y \in F^{\perp} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, x \in F, \quad y \perp x$$

ce qui nous donne l'égalité

$$F^{\perp} = \bigcap_{x \in F} (\mathbb{R} \cdot x)^{\perp}.$$

▷ Or l'orthogonal d'un vecteur

$$(\mathbb{R} \cdot x)^{\perp} = \big[\, \langle\, x \,|\, y \,\rangle = 0 \big]$$

est l'image réciproque du fermé $\{0\} \subset \mathbb{R}$ par l'application

$$[y \mapsto \langle\, x \,|\, y \,\rangle] \;:\; E \to \mathbb{R}$$

et cette application linéaire est une fonction continue de y puisque

$$\forall\, y \in E, \qquad \big|\langle\, x \,|\, y \,\rangle\big| \leqslant \underbrace{\|x\|}_{\text{Cte}}\ \|y\|.$$

(Oui ! C'est bel et bien l'inégalité de Schwarz !)

▷ Donc $(\mathbb{R} \cdot x)^{\perp}$ est une partie fermée de E pour tout $x \in F$ et $F^{\perp}$ est donc un fermé de E, en tant qu'intersection de fermés **[Chap.22 - 23.5]**.

► Si $E = F \oplus F^{\perp}$, alors la projection orthogonale p sur F est bien définie, de même que la projection orthogonale $q = I - p$ sur $F^{\perp}$. L'application q est de E dans E et continue puisque

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|q(x)\big\| \leqslant \|x\| = \sqrt{\|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2}$$

d'après Pythagore.

On en déduit que

$$F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(I - p) = \operatorname{Ker} q = [q(x) = 0_E]$$

et donc que F est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0_E\}$ par l'application continue q.

► Si $\dim F$ est finie, on sait que $E = F \oplus F^{\perp}$, donc F est fermé d'après la démonstration précédent.

Remarque.— On doit aussi savoir **[Chap.25 - 3.3]** que **tout sous-espace de dimension finie de E est fermé**, que E soit un espace préhilbertien ou que ce soit un espace normé quelconque.

► Tout d'abord $F \subset \overline{F}$ **[24]**, donc $(\overline{F})^{\perp} \subset F^{\perp}$ **[Chap17.33.3]**.

▷ Réciproquement, considérons $x \in F^\perp$. Pour tout $y \in \overline{F}$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers y **[25.3]** :

$$\lim_{n\to+\infty} \|y - y_n\| = 0.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \big|\langle x \,|\, y\rangle - \langle x \,|\, y_n\rangle\big| &= \big|\langle x \,|\, y - y_n\rangle\big| \\ &\leqslant \|x\|\,\|y - y_n\|\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x \,|\, y_n\rangle = \langle x \,|\, y\rangle.$$

Or $x \in F^\perp$ et $y_n \in F$, donc $\langle x \,|\, y_n\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent

$$\forall\, y \in \overline{F}, \qquad \langle x \,|\, y\rangle = 0$$

donc $x \in (\overline{F})^\perp$.

▷ On a démontré par double inclusion que $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}F \oplus F^\perp &= F \oplus (\overline{F})^\perp \\ &\subset \overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp && \text{(car } F \subset \overline{F}\text{)} \\ &\subset E\end{aligned}$$

et la dernière inclusion est en fait une inégalité (Théorème de projection sur un convexe fermé, le convexe fermé étant ici $\overline{F}$).