# Étude locale fonctions [10]

**[10.1]** Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tAA = I_n$, donc $A\,{}^tAA = A$ et $A \in V$. Donc $O_n(\mathbb{R})$ est contenu dans V et par conséquent

$$O_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap V. \tag{1}$$

REMARQUE.— Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est aussi contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ — mais n'anticipons pas trop.

**[10.2]** Si $A \in V$ est inversible, alors on peut multiplier (à gauche ou à droite, c'est indifférent) par $A^{-1}$ l'égalité

$$A\,{}^tAA = A$$

et obtenir ${}^tAA = I_n$, ce qui signifie que $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Avec la question précédente, on vient en fait de démontrer que

$$O_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R}) \cap V. \tag{2}$$

**[10.3]** Pour démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est à la fois un ouvert relatif à V et un fermé relatif à V, il faut **[4]** démontrer qu'il existe un ouvert G de E et un fermé F de E tels que

$$O_n(\mathbb{R}) = G \cap V = F \cap V.$$

*On rappelle avant d'aller plus loin que :*

- *toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue ;*
- *en particulier les applications coordonnées (relatives à une base quelconque) sont continues ;*
- *toute combinaison linéaire et tout produit d'applications continues sont encore des applications continues ;*
- *en particulier toute fonction polynomiale des coordonnées (relatives à une base quelconque) est continue ;*
- *tout singleton est fermé.*

▶ Le groupe orthogonal

$$O_n(\mathbb{R}) = [{}^tMM = I_n]$$

est un fermé de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application

$$\left[M \mapsto {}^tMM\right] \;:\; \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),$$

qui est continue en tant que **produit** des applications continues

$$[M \mapsto M] \qquad \text{et} \qquad \left[M \mapsto {}^tM\right]$$

(applications linéaires sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, espace de dimension finie).

On déduit alors de (1) que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé relatif à V (on prend $F = O_n(\mathbb{R})$).

▶ L'ensemble

$$[\det M = 0]$$

est un fermé de $\mathfrak{M}_n(R)$ en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application

$$[M \mapsto \det M] \;:\; \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

qui est continue en tant que fonction polynomiale des coordonnées relatives à la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Eh ? Ben oui : la formule

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$$

n'a jamais servi à calculer le moindre déterminant, il faut bien qu'elle serve à quelque chose !

Le groupe linéaire

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = [\det M \neq 0] = [\det M = 0]^c$$

est donc un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que complémentaire d'un fermé et par (2), le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à $V$ (on prend $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

*Variante : On peut aussi appliquer* ***[6.3]*** *Pour cela, on considère une suite* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $V$ *qui converge vers une matrice* $L \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *et il s'agit de vérifier que la limite* $L$ *appartient encore à* $V$*. Mais comme* $A_k \in V$*,*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A_k{}^t A_k A_k = A_k$$

*et comme l'application*

$$\left[A \mapsto A^t AA\right]$$

*est continue (en tant que produit de trois applications linéaires sur un espace de dimension finie), on déduit du Théorème de composition des limites que*

$$L^t LL = L$$

*et donc que* $L \in V$*. Mission accomplie !*

*Pour la topologie relative à* $V$*, comme pour toutes les topologies, il y a au moins deux parties ouvertes et fermées :* $\varnothing$ *et* $V$*.*

*Mais, au contraire de ce qu'on observe dans un espace vectoriel, ce ne sont pas les seules parties ouvertes et fermées : il y aussi* $O_n(\mathbb{R})$ *(et son complémentaire dans* $V$*, bien sûr).*