Étude locale fonctions [34]

Pour étudier le comportement d'une fonction de deux variables au voisinage de l'infini, nous allons utiliser des analogues du **[12.1]** *(qui se démontrent de la même manière).*

Cas d'une limite finie

S'il existe un réel $R_0 > 0$ et une fonction

$$\varphi\ :\ ]R_0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

de limite nulle au voisinage de $+\infty$ et telle que

$$\begin{matrix}\forall\, r \geqslant R_0,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{matrix} \qquad (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in A \implies \big|f(x, y) - \ell\big| \leqslant \varphi(r)$$

alors la fonction f tend vers ℓ au voisinage de l'infini.

Cas d'une limite infinie

S'il existe un réel $R_0 > 0$ et une fonction

$$\psi\ :\ ]R_0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

qui tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et telle que

$$\begin{matrix}\forall\, r \geqslant R_0,\\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{matrix} \qquad (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in A \implies \big|f(x, y)\big| \geqslant \psi(r)$$

alors la fonction f tend vers l'infini au voisinage de l'infini.

On doit être conscient que l'étude de f au voisinage de l'infini *signifie que la norme de la variable tend vers $+\infty$. Pour se représenter géométriquement la situation, on peut imaginer que la variable peut évoluer n'importe où dans l'ensemble de définition A en restant en dehors d'un disque arbitrairement grand.*

Nous avons choisi les coordonnées polaires à cause des expressions étudiées. On pourrait utiliser n'importe quelle autre norme sur $\mathbb{R}^2$ sans modifier les résultats obtenus. La seule règle est de choisir la norme en fonction de l'expression $f(x, y)$ étudiée.

⋆

[34.1] Quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|(x + y)e^{-(x^2+y^2)}\big| \leqslant \big(|x| + |y|\big)e^{-(x^2+y^2)} \leqslant 2re^{-r^2} = \varphi(r).$$

[34.2] Quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^4 + y^2 = r^2(r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta).$$

❧ La fonction $\big[\theta \mapsto \cos^4\theta + \sin^2\theta\big]$ est continue et π-périodique, donc elle est bornée et atteint ses bornes (c'est comme si la fonction n'était définie que sur le compact $[0, \pi]$). Comme cette fonction ne s'annule pas (puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne peuvent pas s'annuler simultanément), son minimum α est strictement positif.

❧ Pour $r \geqslant 1$, on a donc

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad r^2\underbrace{\cos^4\theta}_{\geqslant 0} + \sin^2\theta \geqslant 1 \cdot \cos^4\theta + \sin^2\theta \geqslant \alpha > 0$$

et donc

$$\forall\, r \geqslant 1,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad x^4 + y^2 \geqslant \alpha\, r^2 = \psi(r).$$

► La fonction $\left[\theta \mapsto 2\cos^4\theta + \sin^4\theta\right]$ est continue et π-périodique, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Comme cette fonction ne s'annule pas, son minimum m_1 est strictement positif. *(Air connu)*

$$\forall\, r > 0,\ \forall\,\theta \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{2x^4+y^4} \leqslant \frac{r^2}{m_1 r^4} = \frac{1}{m_1 r^2} = \varphi(r)$$

Pour les deux exemples suivants, il est important de remarquer que si l'une des coordonnées x ou y tend vers l'infini, alors le vecteur (x, y) tend aussi vers l'infini puisque

$$\|(x,y)\| = r \qquad \text{et} \qquad r \geqslant |x|, \quad r \geqslant |y|.$$

[34.3] Si on se déplace sur l'axe des abscisses,

$$f(x, 0) = 4x^2 \,\ell n|x| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$$

donc la fonction f n'est pas bornée au voisinage de l'infini.

Si on se déplace sur l'axe des ordonnées,

$$\forall\, y \neq 0, \qquad f(0, y) = 0$$

donc la fonction f ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini (utilisation habituelle du Théorème de composition des limites, cf **[13]**).

[34.4] Déplaçons-nous sur la courbe d'équation $x^2y = 1$, qui est clairement contenue dans l'ensemble de définition de f.

$$[x^2y = 1] \subset A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

Dans ce cas,

$$\forall\, x \neq 0, \quad f(x, y) = f\Big(x, \frac{1}{x^2}\Big) = 1 + \frac{4}{x^2}\,\ell n^2\, x$$

expression qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Par conséquent, la fonction f ne tend pas vers $+\infty$ au voisinage de l'infini.

On rappelle qu'une ***forme quadratique*** *sur $\mathbb{R}^3$ est une fonction q définie par la relation*

$$\forall\, u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad q(u) = {}^t uHu$$

où H est une matrice symétrique réelle. Cette forme quadratique est ***définie positive*** *lorsque les valeurs propres de H sont toutes strictement positives.*

[34.5] D'après le Théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et trois réels

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$$

tels que

$${}^t PHP = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \overset{\text{not.}}{=} \Delta$$

et donc

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^3, \qquad q(u) = {}^t uP\Delta\,{}^t Pu = {}^t({}^t Pu)\Delta({}^t Pu).$$

En notant

$${}^t Pu = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \text{on a} \qquad q(u) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

et on en déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q(u) = \lambda_1 a^2 + \underbrace{\lambda_2}_{\geqslant \lambda_1}\underbrace{b^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\lambda_3}_{\geqslant \lambda_1}\underbrace{c^2}_{\geqslant 0} &\geqslant \lambda_1(a^2+b^2+c^2) \\ &= \lambda_1\,{}^t({}^t Pu)({}^t Pu) = \lambda_1\,{}^t uu \\ &= \underbrace{\lambda_1}_{>0}\,\|u\|^2 = \psi(u) \end{aligned}$$

ce qui prouve que q tend vers $+\infty$ lorsque u tend vers l'infini (= lorsque $\|u\|$ tend vers $+\infty$).