MPSI 2 - Semaine 23

A.

A - 1. On suppose que la matrice A est diagonale. Que dire de la matrice A^k pour $k \in \mathbb{N}$? *(On attend la réponse la plus détaillée possible, mais pas de démonstration.)*

Si $A = \mathrm{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, *alors* $A^k = \mathrm{Diag}(a_1^k, \dots, a_n^k)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *– y compris pour* $k = 0$ *car* $A^0 = I_n = \mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.

A - 2. On suppose que la matrice A est triangulaire. Que dire de la matrice A^k pour $k \in \mathbb{N}$? *(On attend la réponse la plus détaillée possible, mais pas de démonstration.)*

Si A *est triangulaire supérieure (resp. inférieure), alors* A^k *est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et les coefficients diagonaux de* A^k *sont*

$$a_{1,1}^k,\ a_{2,2}^k,\ \dots,\ a_{n,n}^k.$$

A - 3. On suppose que la matrice A est symétrique. *Démontrer* que A^k est symétrique pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par convention, $A^0 = I_n$ *et c'est bien une matrice symétrique.*
Par hypothèse, $A^1 = A$ *est symétrique.*
S'il existe $k \geqslant 1$ *tel que* A^k *soit symétrique, alors*

$${}^t(A^{k+1}) = {}^t(A^k.A) = {}^tA.{}^t(A^k) \overset{HR}{=} A.A^k = A^{k+1}$$

donc A^{k+1} *est encore symétrique. On a démontré par récurrence que* A^k *était symétrique pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

⋆

B.

B - 1. Soient A et B, deux matrices symétriques telles que

$$AB = BA.$$

Démontrer que AB est symétrique.

D'après la formule de transposition d'un produit $(\star)$, *l'hypothèse de symétrie* (s) *et l'hypothèse de commutativité* (c),

$${}^t(A.B) \overset{(\star)}{=} {}^tB.{}^tA \overset{(s)}{=} B.A \overset{(c)}{=} A.B$$

donc le produit AB *est une matrice symétrique.*

B - 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

REMARQUE.— *Il est inutile d'effectuer le second produit matriciel. En effet, d'après la question précédente, comme* A *et* B *sont symétriques, on sait que* $BA = {}^t(AB)$.

On constate sur ce contre-exemple que le produit de deux matrices symétriques n'est pas toujours une matrice symétrique.

⋆

C. Soit f, une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

C - 1. On note A, la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la taille de la matrice A ? (nb de lignes, nb de colonnes)

Par hypothèse, f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
Le nombre de colonnes est égal à la dimension de l'espace de départ $\mathbb{R}^3$.
Le nombre de lignes est égal à la dimension de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$.
Donc $A \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: il s'agit d'une matrice ligne.

C - 2. On considère les vecteurs

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (1, 0, 1), \quad w = (0, 1, 1).$$

Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de passage Q de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Que dire du noyau de la matrice Q ? de son image ?

Considérons trois réels a, b et c tels que

$$a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = 0.$$

Cette relation de liaison se traduit par le système suivant

$$\begin{cases} a + b = 0 & \text{1ère coord.} \\ a + c = 0 & \text{2ème coord.} \\ b + c = 0 & \text{3ème coord.} \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. La famille (u, v, w) est donc une famille libre *de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.*

❧ *La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est obtenue en écrivant en* colonnes *les vecteurs u, v et w décomposés dans la base canonique. Donc*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE.— *Il s'agit de la matrice du système précédent. On aurait d'ailleurs pu démontrer que $\mathscr{B}$ était une base en calculant le rang de la matrice Q.*

❧ *En tant que matrice de passage, la matrice Q est inversible, donc son noyau est réduit au vecteur nul et son image est égale à l'espace d'arrivée, c'est-à-dire $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.*

C - 3. Quelle est la matrice de la forme linéaire f relative à la base $\mathscr{B}$? (On citera précisément le théorème appliqué.)

Comme la forme linéaire f est représentée par la ligne $A \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ dans la base canonique et que la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ est la matrice Q, on sait que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = AQ.$$

C - 4. On considère le plan $P \subset \mathbb{R}^3$ représenté par l'équation

$$2x + 3y - z = 0$$

dans la base canonique. Par quelle équation ce plan est-il représenté dans la base $\mathscr{B}$?

Considérons ici la forme linéaire f *représentée dans la base canonique par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base canonique, un vecteur $u = (x, y, z)$ *et son image* $f(u)$ *sont représentés par*

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AX = \begin{pmatrix} 2x + 3y - z \end{pmatrix}.$$

D'après l'équation de P *relative à la base canonique, un vecteur* $u = (x, y, z)$ *appartient au plan* P *si, et seulement si,* $f(u) = 0$.

❧ *Notons* r, s *et* t, *les coordonnées du vecteur* u *relatives à la base* $\mathscr{B}$ *:*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

Le réel $f(u) = 0$ *se calcule alors dans la base* $\mathscr{B}$ *par*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(u)\big) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = (AQ) \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

et comme

$$AQ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

l'équation vectorielle $f(u) = 0$ *se traduit alors par l'équation*

$$5r + s + 2t = 0,$$

qui représente le plan P *dans la base* $\mathscr{B}$.

⋆

D. Soient u, un endomorphisme de E et x, un vecteur de E. On suppose qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(x) = \lambda \cdot x.$$

D - 1. Dans cette question, on suppose que $\lambda \neq 0$. Démontrer que $x \in \operatorname{Im} u$.

Comme $\lambda \neq 0$ *et que* u *est linéaire,*

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot u(x) = u\Big(\frac{1}{\lambda} \cdot x\Big) \in \operatorname{Im} u.$$

D - 2. Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et que la matrice de u relative à la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les vecteurs $x \in E$ tels que $u(x) = 0 \cdot x$? Ces vecteurs appartiennent-ils à l'image de u ?

On note (e_1, e_2), *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

❧ *Résoudre l'équation* $u(x) = 0 \cdot x$, *c'est chercher les vecteurs du noyau de* u.

Il est clair que le rang de u est égal à 1, donc le noyau de u est une droite vectorielle. Manifestement, le premier vecteur de la base canonique appartient à $\operatorname{Ker} u$*, donc*

$$u(x) = 0 \cdot x \qquad \iff \qquad x \in \mathbb{R} \cdot e_1.$$

❧ *La deuxième colonne de la matrice signifie que $u(e_2) = e_1$ et donc que e_1 appartient à l'image de u. Par conséquent, toutes les solutions de l'équation $u(x) = 0 \cdot x$ appartiennent à l'image de u.*

D - 3. Mêmes questions avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette fois encore, $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R} \cdot e_1$*. Mais l'image de u est dirigée par le vecteur $e_2 = u(e_2)$, donc le sous-espace*

$$\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = (\mathbb{R} \cdot e_1) \cap (\mathbb{R} \cdot e_2)$$

est réduit au vecteur nul.
Dans ce cas, la seule solution de l'équation $u(x) = 0 \cdot x$ qui appartienne à l'image de u est le vecteur nul.

⋆

E. Soit E, un espace vectoriel. On suppose connus deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G$$

et un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que

$$\forall\, x \in F, \quad u(x) = 2x \quad \text{et} \quad \forall\, y \in G, \quad u(y) = -y.$$

E - 1. Soit $z \in E$. Démontrer qu'il existe deux vecteurs $x \in F$ et $y \in G$ tels que

$$z = x + y.$$

Y a-t-il unicité du couple (x, y) ? Exprimer $u(z)$ en fonction de x et y.
Par définition *des sous-espaces supplémentaires : pour tout $z \in E$, il existe un, et un seul, couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$.*
❧ *Par linéarité de u,*

$$u(z) = u(x) + u(y) = 2 \cdot x - y.$$

E - 2. On considère deux vecteurs $x \in F$ et $y \in G$ et on suppose qu'aucun de ces vecteurs n'est égal à 0_E. Démontrer que la famille (x, y) est libre.
Considérons deux réels a et b tels que

$$\underbrace{a \cdot x}_{\in F} + \underbrace{b \cdot y}_{\in G} = 0.$$

Comme F et G sont en somme directe, on en déduit que

$$a \cdot x = b \cdot y = 0$$

et comme $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on peut conclure que $a = b = 0$, ce qui prouve que la famille (x, y) est libre.

E - 3. Soit $z \in E$, un vecteur tel que $u(z) = 2 \cdot z$. Démontrer que $z \in F$.

Quand on a décomposé z dans la somme directe $F \oplus G$, on a démontré que

$$u(z) = 2 \cdot x - y.$$

Si on suppose que $u(z) = 2 \cdot z = (2 \cdot x) + (2 \cdot y)$, on en déduit que

$$u(z) - u(z) = 0 = 3 \cdot y$$

donc $y = 0$ et finalement $z = x \in F$.

E - 4. Avec les notations de **E - 1.** , démontrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u^k(z) = 2^k \cdot x + (-1)^k \cdot y.$$

L'endomorphisme u est-il un projecteur ?

La propriété est évidente pour $k = 0$:

$$u^0(z) = z = x + y = 2^0 \cdot x + (-1)^0 \cdot y$$

et pour $k = 1$ par **E - 1.**

Supposons que cette propriété soit vraie pour un entier $k \geqslant 1$. Par linéarité de u, on en déduit que

$$\begin{aligned} u^{k+1}(z) = u\big(u^k(z)\big) &= 2^k \cdot u(x) + (-1)^k \cdot u(y) \\ &= 2^{k+1} \cdot x + (-1)^{k+1} \cdot y. \end{aligned}$$

La propriété est ainsi démontrée par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$.

⋆

F. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère le plan P représenté dans la base canonique par l'équation

$$[2x - y + z = 0]$$

et les deux droites vectorielles

$$D_0 = \mathbb{R} \cdot (1, 1, -1) \quad \text{et} \quad D_1 = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1).$$

F - 1. Les sous-espaces D_0 et P sont-ils supplémentaires dans E ?

Le vecteur $(1, 1, -1)$ vérifie l'équation de P, donc $D_0 \subset P$ et par conséquent les deux sous-espaces ne sont pas en somme directe (et a fortiori pas supplémentaires dans E).

F - 2. Démontrer que les sous-espaces D_1 et P sont supplémentaires dans E.

Le vecteur $(1, -1, 1)$ ne vérifie pas l'équation de P, donc la droite D_1 et le plan P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

REMARQUE.— *Il faut absolument savoir qu'un plan et une droite de $\mathbb{R}^3$ sont supplémentaires si, et seulement si, la droite n'est pas contenue dans le plan. (Dans cette situation, l'intersection est réduite au vecteur nul et la somme des dimensions est égale à la dimension de l'espace : $2 + 1 = 3$.)*

F - 3. Soit $u = (x, y, z) \in E$. On note $p(u)$, le projeté du vecteur u sur le plan P parallèlement à la droite D_1. Rappeler la définition du vecteur $p(u)$.

Comme P et D_1 sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique couple

$$(v, w) \in P \times D_1$$

tel que $u = v + w$. Le projeté de u sur P parallèlement à D_1 est alors le vecteur v.
Le projeté $p(u)$ est donc caractérisé par deux propriétés :

$$p(u) \in P \qquad \textit{et} \qquad u - p(u) \in D_1.$$

F - 4. On note A, la matrice qui représente la projection p dans la base canonique de E. *(On ne demande pas encore de calculer cette matrice.)*
Que sait-on de la trace et du rang de cette matrice ? Quelle relation de liaison existe-t-il entre les colonnes de cette matrice ?

Comme p est un projecteur et que son image est un plan (le plan P), son rang est égal à 2 et sa trace, égale à son rang, est aussi égale à 2.
❧ Notons (e_1, e_2, e_3), la base canonique de E et C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrice A. Par définition de A,

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant 3, \quad C_j = \mathfrak{Mat}_{can}\big(p(e_j)\big).$$

Par conséquent, une relation de liaison entre les colonnes de A

$$a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 = 0$$

équivaut à une relation de liaison dans l'image de p

$$a_1 \cdot p(e_1) + a_2 \cdot p(e_2) + a_3 \cdot p(e_3) = 0$$

ce qui nous donne un vecteur du noyau de p

$$p(a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3) = 0$$

puisque p est linéaire.
Par définition, $\operatorname{Ker} p = D_1 = \mathbb{R} \cdot (1, -1, 1)$, donc les colonnes de A sont liées par la relation :

$$C_1 - C_2 + C_3 = 0.$$

REMARQUE.— *De manière analogue, la connaissance de l'image nous donne une relation de liaison entre les lignes de la matrice. En effet, chaque colonne de la matrice A appartient à son image et vérifie donc l'équation cartésienne du plan P :*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} C_3 = 0$$

et ces trois égalités peuvent se résumer par la relation de liaison

$$2L_1 - L_2 + L_3 = 0.$$

F - 5. Calculer une base de P. En déduire une matrice inversible Q telle que

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme P est un plan, une base de P est constituée de deux vecteurs linéairement indépendants de P, c'est-à-dire de deux solutions non proportionnelles de l'équation de P.

$$P = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 \overset{\text{déf.}}{=} (1, 2, 0),\ \varepsilon_2 \overset{\text{déf.}}{=} (0, 1, 1)).$$

❧ *Analysons la matrice $Q^{-1}AQ$ pour comprendre comment choisir la matrice Q.*
On rappelle pour commencer que la matrice A représente l'endomorphisme p dans la base canonique.
D'après la Formule du changement de base pour les endomorphismes, $Q^{-1}AQ$ représente alors le même endomorphisme p dans une base

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

telle que Q soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.
Lisons la matrice $Q^{-1}AQ$ colonne par colonne :

$$\begin{aligned}
p(\varepsilon_1) &= 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_1 && \text{(1ère colonne)}\\
p(\varepsilon_2) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_2 && \text{(2ème colonne)}\\
p(\varepsilon_3) &= 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 = 0 && \text{(3ème colonne)}
\end{aligned}$$

et comme u est un projecteur, il faut donc que

$$\varepsilon_1 \in \operatorname{Im} p = P, \quad \varepsilon_2 \in P, \quad \varepsilon_3 \in \operatorname{Ker} p = D_1.$$

Nous en savons suffisamment pour définir une matrice Q convenable.
❧ *Le plan P et la droite D_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, en réunissant une base de P et un vecteur directeur de D_1, comme $\varepsilon_3 = (1, -1, 1)$ par exemple, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$. Posons donc*

$$\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

La matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base $\mathscr{B}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (en tant que matrice de passage).

▷ *D'après la formule de changement de base,*

$$Q^{-1}AQ = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$$

et pour calculer $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$, nous revenons à la définition : la j-ième colonne donne les coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$ du vecteur $p(\varepsilon_j)$.

▷ *On calcule dans la base canonique :*

$$\mathfrak{Mat}_{can}(p(\varepsilon_1)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{can}(\varepsilon_1)$$

et on en déduit que

$$p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$$

ce qui prouve que la première colonne de $Q^{-1}AQ$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▷ *On peut continuer de la même manière pour calculer les deux autres colonnes. Mais il est plus malin de se rappeler que les sous-espaces P et D_1 ont une signification géométrique.*

Comme $P = \operatorname{Im} p$ *et que* $\varepsilon_2 \in P$*, alors*

$$p(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$$

ce qui nous donne la deuxième colonne de $Q^{-1}AQ$.
Comme $D_1 = \operatorname{Ker} u$ *et que* $\varepsilon_3 \in D_1$*, alors*

$$p(\varepsilon_3) = 0$$

et nous avons maintenant la troisième colonne de $Q^{-1}AQ$.

▷ *On en déduit finalement que*

$$Q^{-1}AQ = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

F - 6. Calculer la matrice A.

Les fans du calcul matriciel peuvent commencer par calculer Q^{-1}

$$Q^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et déduire A *de la relation précédente.*

$$A = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

❧ *Il est plus simple, me semble-t-il, de revenir à la caractérisation géométrique du projeté rappelée au* **F - 3.**
Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, le vecteur*

$$(x', y', z') = p(u)$$

appartient au plan P*, c'est-à-dire*

$$2x' - y' + z' = 0$$

et le vecteur $u - p(u)$ *appartient à la droite* D_1*, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$(x, y, z) - (x', y', z') = \alpha \cdot (1, -1, 1)$$

c'est-à-dire

$$(x', y', z') = (x - \alpha, y + \alpha, z - \alpha).$$

On déduit de ces deux propriétés que

$$\alpha = \frac{-2x + y - z}{4}$$

puis que

$$(x', y', z') = \frac{1}{4}(2x + y - z,\ 2x + y + z,\ -2x + y + 3z)$$

et enfin que

$$A = \mathfrak{Mat}_{can}(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

⋆

G. On étudie ici la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

G - 1. Calculer le rang et la trace de A.

Les trois colonnes de A sont proportionnelles à la colonne C introduite à la question **G - 3.**

$$C_1 = 2C \qquad C_2 = -C \qquad C_3 = 3C$$

Donc le rang de A est égal à 1.
Quant à la trace, elle est égale à $2 - 2 + 3 = 3$.

G - 2. Calculer une base de $\operatorname{Im} A$.
Démontrer que $\operatorname{Ker} A$ est un plan et donner une équation cartésienne de ce plan.

Comme le rang de A est égal à 1, son image est une droite vectorielle. Comme l'image de A est engendrée par les colonnes de A, on en déduit que l'image de A est dirigée par la colonne C.
❧ *D'après le Théorème du rang, la dimension du noyau de A est égale à la différence entre le nombre de colonnes (= dimension de l'espace de départ) et le rang de A. Donc $\dim \operatorname{Ker} A = 2$.*
❧ *La colonne X appartient au noyau de A si, et seulement si, $AX = 0$. Comme les lignes de A sont toutes proportionnelles, le système $AX = 0$ est constitué de trois équations proportionnelles et il nous reste*

$$\operatorname{Ker} A = [2x - y + 3z = 0]$$

(avec la première ligne, qui est aussi la plus simple).

G - 3. Calculer une ligne

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

telles que

$$CL = A \qquad \text{où} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit LC et en déduire que

$$A^2 = -3A.$$

D'après les proportions écrites en **G - 1.** *, la ligne*

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

convient.
❧ *Avant de poser le calcul, on cherche la taille du résultat : en tant que produit d'une ligne par une colonne, la matrice LC appartient à $\mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.*
On vérifie sans peine que

$$LC = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}.$$

❧ *On en déduit, par associativité du produit matriciel, que*

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = -3CL = -3A.$$

G - 4. On considère la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de Q et en déduire que Q est inversible. Démontrer *sans calcul* que

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire enfin que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les opérations de pivot sur les colonnes (et sur les lignes aussi) conservent le rang. En notant $\equiv$ la propriété que deux matrices sont équivalentes, on a

$$Q \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_1}{\equiv} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que les deux dernières colonnes ne sont pas proportionnelles (donc : rang au moins égal à 2) et que la troisième colonne n'est pas une combinaison lin'eaire des deux autres (donc : rang au moins égal à 3). Par conséquent, la matrice Q est inversible.
❧ *Appliquer la matrice Q aux matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ revient à extraire les colonnes de la matrice Q.*
En particulier (première colonne !),

$$Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et comme la matrice Q est inversible,

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

❧ *D'après la factorisation $A = CL$,*

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ = (Q^{-1}C)(LQ) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$