Étude locale des fonctions [12]

Le plan $\mathbb{R}^2$ est ici muni de la norme euclidienne canonique.

[12.1] Nous allons bien évidemment procéder par double implication.

► Supposons que f tende vers ℓ au voisinage de (x_0, y_0).

▷ Par définition de la limite, pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \alpha_1 \implies \left|f(x,y) - \ell\right| \leqslant 1.$$

En particulier, pour tout $0 < r \leqslant \alpha_1$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le couple

$$(x,y) = (x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)$$

vérifie bien

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| = r \leqslant \alpha_1$$

et la fonction

$$\left[\theta \mapsto f\big(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta\big) - \ell\right]$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ (sa valeur absolue est inférieure à 1).

▷ On peut donc poser

$$\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1, \quad \varphi(r) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \tag{$\star$}$$

pour obtenir

$$\begin{array}{l}\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1, \\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \quad \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \leqslant \varphi(r) \tag{$\star\star$}$$

(puisque le sup $(\star)$ calculé sur le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r, est un majorant).

▷ Revenons à la définition de la limite.
Pour tout $0 < \varepsilon \leqslant 1$, il existe $0 < \alpha(\varepsilon) \leqslant \alpha_1$ tel que

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leqslant \alpha(\varepsilon) \implies \left|f(x,y) - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Le majorant étant indépendant de (x,y), on peut passer au sup en restant sur le cercle de centre (x_0,y_0) et de rayon $0 < r \leqslant \alpha(\varepsilon)$:

$$\forall\, 0 < r \leqslant \alpha(\varepsilon), \qquad 0 \leqslant \varphi(r) \leqslant \varepsilon.$$

On vient de démontrer que la fonction $\varphi :]0, \alpha_1] \to \mathbb{R}_+$, définie par $(\star)$ et qui vérifie la propriété $(\star\star)$, tend vers 0 au voisinage de 0.

► La réciproque est beaucoup plus simple. On suppose qu'il existe un réel $\alpha_1 > 0$ et une fonction φ définie sur $]0, \alpha_1]$ et de limite nulle en 0 telle que

$$\begin{array}{l}\forall\, 0 < r \leqslant \alpha_1, \\ \forall\, \theta \in \mathbb{R},\end{array} \quad \left|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta) - \ell\right| \leqslant \varphi(r).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur φ, il existe un réel $0 < \alpha \leqslant \alpha_1$ tel que

$$\forall\, 0 < r \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \varphi(r) \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout (x,y) tel que

$$\left\|(x,y) - (x_0,y_0)\right\| \leqslant \alpha,$$

le point (x,y) est dans le disque fermé de centre (x_0,y_0) et de rayon α, donc il existe $0 \leqslant r \leqslant \alpha$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y) = (x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)$$

et par conséquent

$$\left|f(x,y) - \ell\right| \leqslant \varphi(r) \leqslant \varepsilon.$$

On vient de démontrer que f tend vers ℓ au voisinage de (x_0, y_0) ! (Relire ce qui est écrit en rouge...)

[12.2] On traite les quatre exemples au moyen des coordonnées polaires en mettant en évidence une fonction φ convenable à chaque fois.

Premier exemple

$$0 \leqslant f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} \leqslant r^2 = \varphi(r)$$

Deuxième exemple

$$0 \leqslant \big|f(x,y)\big| \leqslant \frac{r^3(|\cos^3\theta|+|\sin^3\theta|)}{r^2} \leqslant 2r = \varphi(r)$$

Troisième exemple

$$0 \leqslant \big|f(x,y)\big| \leqslant \frac{2|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leqslant \frac{3r^3}{r^2} = 3r = \varphi(r)$$

Quatrième exemple

La fonction $\left[\theta \mapsto \sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\right]$ est continue et π-périodique sur $\mathbb{R}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint un minimum et comme la fonction ne s'annule jamais (puisque $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne peuvent s'annuler en même temps !), son minimum m_0 est strictement positif.

$$0 \leqslant \big|f(x,y)\big| \leqslant \frac{r^4}{r^2\sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}} \leqslant \frac{r^2}{m_1} = \varphi(r)$$

► Les quatre fonctions sont naturellement définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ et continues sur cet ouvert (soit comme fonctions rationnelles, soit par opérations sur des fonctions continues).

On vient de démontrer qu'elles tendent vers 0 au voisinage de $(0,0)$. On peut donc, *si on y a intérêt*, les prolonger en fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$.

[12.3] Pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite au voisinage du point $O = (0,0)$, on peut procéder par contraposée en utilisant le Théorème de composition des limites. *Si f tend vers ℓ au voisinage de O et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tend vers O au voisinage de 0, alors la composée*

$$(f\circ g)(t) = f\big(g_x(t),\ g_y(t)\big)$$

tend aussi vers ℓ lorsque t tend vers 0.

Premier exemple

Avec $g_1(t) = (t,t)$ et $g_2(t) = (t,-t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que f n'a pas de limite au voisinage de $(0,0)$.

REMARQUE.— En coordonnées polaires, on aurait trouvé

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1 + \cos\theta\sin\theta$$

et quel que soit $\ell \in \mathbb{R}$, il est impossible de majorer l'écart, **qui ne dépend pas de r,**

$$\big|f(x,y) - \ell\big|$$

par une expression qui ne dépend que de r et qui tend vers 0 lorsque r tend vers 0.

Deuxième exemple

Avec $g_1(t) = (t,0)$ et $g_2(t) = (0,t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = 1 \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = -1.$$

REMARQUE.— En coordonnées polaires,

$$\forall\, r > 0, \quad f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \cos 2\theta.$$

Troisième exemple
Avec $g_1(t) = (t, t)$ et $g_2(t) = (t, -t)$, on obtient

$$\forall\, t \neq 0, \quad f[g_1(t)] = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f[g_2(t)] = \frac{-1}{2}.$$

REMARQUE.— En coordonnées polaires,

$$\forall\, r > 0, \quad f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \sin\theta\cos\theta.$$

Pour trouver les fonctions g_1 et g_2 qui prouvent que la fonction f n'a pas de limite, il est utile de passer en coordonnées polaires pour voir comment f dépend de r.

Si f ne dépend pas de r (comme c'est le cas de ces trois exemples), la dépendance en θ permet de trouver des chemins qui mènent à des valeurs incompatibles.