Étude locale des fonctions [46]

▶ La norme considérée par l'énoncé est bien une norme sur $E = \mathbb{R}_2[X]$: il s'agit de la norme produit associée à la base canonique de E !

$$\|P\| = \left\|\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(P)\right\|_\infty$$

Dans le même ordre d'idée, les trois applications coordonnées

$$\varepsilon_2 = \left[P = aX^2 + bX + c \mapsto a\right] \qquad \varepsilon_1 = [P \mapsto b] \qquad \varepsilon_0 = [P \mapsto c]$$

sont linéaires et (donc) continues sur E, espace de dimension finie.
[1] Le noyau de la première forme coordonnée :

$$[\varepsilon_2(P) = 0] = [a = 0]$$

est un fermé de E (en tant que noyau d'une forme linéaire continue).

L'ensemble U des polynômes de degré 2 (dont le degré est *exactement égal* à 2) est, par définition, le complémentaire de $[\varepsilon_2(P) = 0]$:

$$U = [\varepsilon_2(P) \neq 0] = [\varepsilon_2(P) = 0]^c$$

et <u>U est donc un ouvert de E</u>.

▶ Soit $P = aX^2 + bX + c$, un polynôme de E.

Si $a \neq 0$, alors $P \in U$.

Si $a = 0$, alors $P \notin U$ et on pose alors

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad P_n = \frac{1}{n}X^2 + bX + c \in U.$$

On a ainsi défini une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de U qui converge vers P :

$$\|P - P_n\| = \left\|\frac{1}{n}X^2\right\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc <u>l'ouvert U est bien dense dans E</u>.

▶ Les polynômes $A = X^2$ et $B = -X^2$ appartiennent tous les deux à U.

S'il existe une application *continue* $f : [0,1] \to E$ telle que

$$f(0) = A, \quad f(1) = B \quad \text{et} \quad \forall\, t \in [0,1], \quad f(t) \in U$$

alors la fonction

$$(\varepsilon_2 \circ f) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

est continue (en tant que composée d'applications continues) sur l'intervalle $[0,1]$, strictement positive en $t = 0$ (car $\varepsilon_2(A) = +1$) et strictement négative en $t = 1$ (car $\varepsilon_2(B) = -1$). D'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, il existe donc un instant $t_0 \in]0,1[$ tel que

$$(\varepsilon_2 \circ f)(t_0) = 0$$

c'est-à-dire $f(t_0) \notin U$: c'est absurde !

Donc <u>l'ouvert U n'est pas connexe par arcs</u>.

REMARQUE.— *L'ouvert* U *est l'union de deux composantes connexes par arcs :*

$$U = [a > 0] \sqcup [a < 0].$$

En effet, si $A = a_1X^2 + b_1X + c_1$ *et* $B = a_2X^2 + b_2X + c_2$ *avec* $a_1 > 0$ *et* $a_2 > 0$, *alors la fonction* affine *définie par*

$$\begin{aligned}\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) &= (1-t)A + tB \\ &= \big[(1-t)a_1 + ta_2\big]X^2 + \big[(1-t)b_1 + tb_2\big]X + \big[(1-t)c_1 + tc_2\big]\end{aligned}$$

est continue, elle vérifie $f(0) = A$ et $f(1) = B$ et

$$\forall\, t \in [0,1], \quad (\varepsilon_2 \circ f)(t) = (1-t)a_1 + ta_2 \in [a_1 \leftrightarrow a_2] \subset \mathbb{R}_+^*.$$

(On vient en fait de démontrer que les deux composantes connexes par arcs de U sont des parties convexes *!)*

Idem si a_1 et a_2 sont strictement négatifs.

[2.a] L'application

$$\left[P \mapsto b^2 - 4ac\right]$$

est une fonction continue sur E en tant que fonction polynomiale des coordonnées.

Le discriminant Δ est donc une fonction continue en tant que restriction à l'ouvert U d'une application continue sur E.

Le discriminant n'est défini que sur U, pas sur E tout entier !

[2.b] Par définition de Δ,

$$F \overset{\text{not.}}{=} \left[\Delta(P) = 0\right] = [b^2 - 4ac = 0] \cap U.$$

La partie $[b^2 - 4ac = 0]$ est un fermé de E en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue (fonction polynomiale des coordonnées), donc **[4.3]** <u>F est un fermé relatif à U</u>.

► Mais <u>F n'est pas un fermé de E</u> ! Considérons les polynômes définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$P_n = 2^{-n}X^2.$$

Il est clair qu'il s'agit d'une suite d'éléments de F et que cette suite converge vers le polynôme nul :

$$\|P_n - 0\| = 2^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

alors que le polynôme nul n'appartient pas à F. La partie F n'est donc pas stable par passage à la limite.

[2.c] On considère un point $P_0 \in F$ et V, un voisinage relatif à U de ce point. Il existe **[4.1]** un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \cap U \subset V.$$

Comme U est un ouvert, si le rayon $r_0 > 0$ est choisi assez petit, on a

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \subset U$$

et donc

$$\left[\|P - P_0\| \leqslant r_0\right] \subset V.$$

Si on note $P_0 = a_0^2 + b_0X + c_0$, on sait que

$$a_0 \neq 0 \quad \text{et que} \quad b_0^2 - 4a_0c_0 = 0$$

(par définition de $P_0 \in F$). Il est alors clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_0^2 - 4a_0(c_0 + 2^{-n}) = -2^{-n+2}a_0 \neq 0$$

et donc que

$$Q_n = a_0X^2 + b_0X + (c_0 + 2^{-n}) \notin F$$

alors que

$$Q_n \in U \qquad \text{et} \qquad \|Q_n - P_0\| = 2^{-n}$$

ce qui signifie que $Q_n \in V$ pour tout n assez grand.

En clair : si $P_0 \in F$, on a trouvé une suite de polynômes (Q_n) qui converge vers P_0 alors qu'aucun de ces polynômes n'appartient à F.

En VO : tout voisinage relatif à U d'un polynôme $P_0 \in F$ rencontre F^c, c'est-à-dire : F est une partie d'intérieur vide relativement à U.

Il faut faire le parallèle avec $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$! L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et d'intérieur vide, puisque tout voisinage d'un nombre $x_0 \in \mathbb{Q}$ contient des irrationnels.