Pour démontrer que F est continue sur U, il faut prouver que F est continue en chaque point de U. La démonstration commence donc par :

▶ Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$. Comme U est un ouvert, il existe un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$K \overset{\text{not.}}{=} \left[\|\mathbf{M_0M}\| \leqslant r_0\right] \subset U$$

et K, en tant que boule fermée dans un espace de dimension finie, est une partie compacte de E **[Chap.23 - 22.2 & 35.5]**.

Dans la définition ***[Chap.22 - 15.1]*** *des voisinages, il est dit qu'il existe une boule* ouverte *de centre M_0 et de rayon $r > 0$ contenue dans U.*

Pour tout $0 < r_0 < r$, la boule fermée *de centre M_0 et de rayon r_0 est contenue dans la boule ouverte de centre M_0 et de rayon r. C'est une telle boule fermée que nous notons K.*

L'avantage de considérer une boule fermée est qu'une telle boule, dans un espace de dimension finie, est une partie compacte. (On dit que les EVN de dimension finie sont localement compacts.*)*

▶ Par **[Chap.23 - 13]**, le produit

$$K \times [a, b]$$

est une partie compacte de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Comme la fonction f est continue sur $U \times [a, b]$, sa restriction au compact $K \times [a, b]$ est uniformément continue **[27.4]**.

▶ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $b > a$ (du moins, je l'espère), le réel $\frac{\varepsilon}{b-a}$ est strictement positif et, par *continuité uniforme*, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\forall\, t \in [a, b],\ \forall\, \big((x, y), s\big) \in K \times [a, b],\\
&\qquad \big\|\big((x, y), s\big) - \big((x_0, y_0), t\big)\big\|_\infty \leqslant \alpha\\
&\qquad\qquad\qquad \implies \big|f(x, y, s) - f(x_0, y_0, t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\forall\, M = (x, y) \in K,\ \forall\, t \in [a, b],\\
&\quad \left\{\begin{array}{l} |x - x_0| \leqslant \alpha \\ |y - y_0| \leqslant \alpha \end{array}\right\} \implies \big|f(M, t) - f(M_0, t)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}
\end{aligned}$$

puisque $\|(M, t) - (M_0, t)\|_\infty = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, 0\}$.

▶ La conservation des inégalités par l'intégrale nous donne alors :

$$\begin{aligned}
\big|F(M) - F(M_0)\big| &= \left|\int_a^b f(x, y, t) - f(x_0, y_0, t)\,dt\right|\\
&\leqslant \int_a^b \big|f(x, y, t) - f(x_0, y_0, t)\big|\,dt\\
&\leqslant (b - a) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon
\end{aligned}$$

pour tout $M = (x, y) \in U$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$ et $|y - y_0| \leqslant \alpha$.

On a bien démontré que F était continue au point $M_0 \in U$ et comme cela vaut pour tout $M_0 \in U$, on a démontré que F était continue sur U.