Étude locale des fonctions [31]

On considère ici une fonction définie par une intégrale qui dépend de trois paramètres : les deux bornes et un troisième paramètre sous le signe $\int$. La régularité d'une telle expression ne fait pas partie des théorèmes au programme, mais on peut l'étudier en restant dans le cadre du programme...

► On précise que I et J sont des intervalles de longueur strictement positive, qu'on suppose *ouverts* pour simplifier.

► Pour des raisons de commodité aussi, nous munissons les espaces $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs normes produit respectives (ce qui n'est pas une restriction comme on sait), qu'on notera toutes les deux $\|\cdot\|_\infty$.

► Dans tout ce qui suit, on fixe un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.

► Comme les intervalles I et J sont ouverts, il existe $r > 0$ tel que

$$[x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times I \times J = \Omega. \tag{1}$$

Comme I est un *intervalle*, il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subset [a, b] \quad \text{et} \quad [y_0 - r, y_0 + r] \subset [a, b]. \tag{2}$$

En tant que produits de deux segments de $\mathbb{R}$, les rectangles

$$K_1 = [x_0, y_0] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times J = U$$

et

$$K_2 = [a, b] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset I \times J$$

sont des parties compactes de $\mathbb{R}^2$ **[Ch.22 - 13]**.

► On **fixe** maintenant une tolérance $\varepsilon > 0$.

► Comme la fonction f est continue sur U, elle est en particulier bornée sur le compact K_2 **[24]** :

$$\exists\, A > 0,\ \forall\, (t, z) \in K_2, \qquad \big|f(t, z)\big| \leqslant A \tag{3}$$

et uniformément continue sur le compact K_1 **[27.4]** :

$$\begin{aligned} &\exists\, \alpha > 0, \forall\, (t, z), (t_1, z_1) \in K_1, \\ &\qquad \|(t_1, z_1) - (t, z)\|_\infty \leqslant \alpha \implies \big|f(t, z) - f(t_1, z_1)\big| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

donc en particulier

$$\begin{aligned} &\exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [x_0, y_0],\ \forall\, z \in [z_0 - r, z_0 + r], \\ &\qquad |z - z_0| \leqslant \alpha \implies \big|f(t, z) - f(t, z_0)\big| \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

► Nous disposons de deux réels strictement positifs : r donné par (1) et α donné par (4). Nous noterons dans la suite α_0, le plus petit de ces deux réels :

$$\alpha_0 = \min\{r,\ \alpha\} > 0.$$

De cette manière,

$$[z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0] \subset [z_0 - r, z_0 + r]$$

et

$$|z - z_0| \leqslant \alpha_0 \implies |z - z_0| \leqslant \alpha.$$

D'après (3),

$$\forall\, (t, z) \in [a, b] \times [z_0 - \alpha_0, z_0 + \alpha_0] \subset K_2, \quad \big|f(t, z)\big| \leqslant A \tag{5}$$

et d'après (4),

$$\forall\,(t,z)\in[x_0,y_0]\times[z_0-\alpha_0,z_0+\alpha_0],\qquad \bigl|f(t,z)-f(t,z_0)\bigr|\leqslant\varepsilon. \tag{6}$$

► Nous appliquons maintenant l'astuce taupinale et l'inégalité triangulaire avec opiniâtreté. Quel que soit $(x,y,z)\in[a,b]\times[a,b]\times[z_0-\alpha_0,z_0+\alpha_0]$,

$$\begin{aligned}
&\bigl|F(x,y,z)-F(x_0,y_0,z_0)\bigr| \\
&\qquad=\left|\left(\int_x^{x_0} f(t,z)\,dt+\int_{x_0}^{y_0} f(t,z)\,dt+\int_{y_0}^{y} f(t,z)\,dt\right)-\int_{x_0}^{y_0} f(t,z_0)\,dt\right| \\
&\qquad\leqslant\left|\int_x^{x_0} f(t,z)\,dt\right|+\left|\int_{x_0}^{y_0} f(t,z)-f(t,z_0)\,dt\right|+\left|\int_{y_0}^{y} f(t,z)\,dt\right| \\
&\qquad\leqslant A|x-x_0|+\left|\int_{x_0}^{y_0} f(t,z)-f(t,z_0)\,dt\right|+A|y-y_0| \qquad\text{(par (5))}
\end{aligned}$$

car $[x\leftrightarrow x_0]\subset[a,b]$ et $[y\leftrightarrow y_0]\subset[a,b]$. et d'après (6),

$$\left|\int_{x_0}^{y_0} f(t,z)-f(t,z_0)\,dt\right|\leqslant|y_0-x_0|\,\varepsilon\leqslant(b-a)\varepsilon.$$

► Si on impose *en outre* $|x-x_0|\leqslant {}^{\varepsilon}/_{A}$ et $|y-y_0|\leqslant {}^{\varepsilon}/_{A}$, c'est-à-dire

$$\max\bigl\{|x-x_0|,\ |y-y_0|\bigr\}\leqslant\underbrace{\min\{\alpha_0,\ {}^{\varepsilon}/_{A}\}}_{>0}\quad\text{et}\quad|z-z_0|\leqslant\alpha_0,$$

alors

$$\bigl|F(x,y,z)-F(x_0,y_0,z_0)\bigr|\leqslant(b-a+2)\varepsilon.$$

Les réels a et b ayant été choisis **avant** ε, ce sont bien des *constantes* et cela prouve que F est continue au point (x_0,y_0,z_0).