Exercice ultra-classique !

▶ La fonction F est naturellement définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la diagonale $\Delta = [y = x]$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en tant que quotient de la différence des fonctions continues

$$(x, y) \xmapsto{\text{lin.}} x \xmapsto{\text{cont.}} f(x) \quad \text{et de} \quad (x, y) \longmapsto y \longmapsto f(y)$$

par la fonction linéaire (ou polynomiale)

$$(x, y) \longmapsto x - y$$

qui ne s'annule pas sur la diagonale Δ.

▶ Le prolongement de F à $\mathbb{R}^2$ défini par l'énoncé est le plus naturel qui soit. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ *fixé*,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \xrightarrow[y \to x]{} f'(x)$$

puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{y \to x} F(x, y) = F(x, x), \tag{1}$$

condition minimale pour que F soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

Il reste à prouver que ce prolongement est bien continu sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire (compte tenu de ce qui précède) continu en chaque point (x_0, x_0) de la diagonale Δ.

REMARQUE.— *La propriété (1) n'indique qu'une "continuité partielle" de la fonction F, puisqu'une seule variable varie (y), l'autre variable étant fixée (x est fixée par le quantificateur).*

NB : La "continuité partielle" n'a pas de sens mathématique, c'est juste une façon imagée de parler.

▶ **Première méthode**

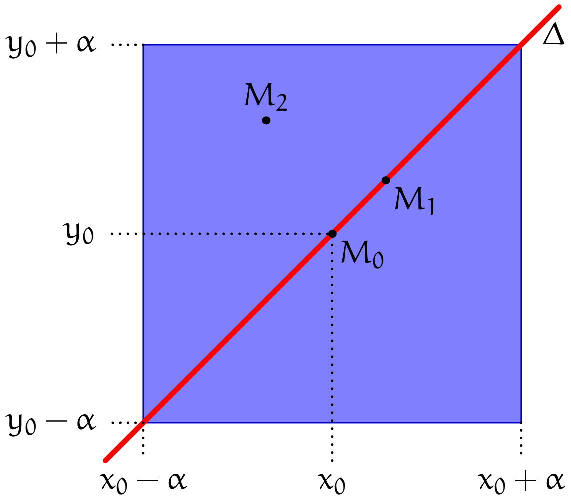
▷ Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$, le point $M_0 = (x_0, x_0)$ sur la diagonale et une tolérance $\varepsilon > 0$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \qquad \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

▷ Considérons maintenant un point $M = (x, y)$, distinct de M_0, tel que

$$\|\mathbf{M_0 M}\|_\infty \leqslant \alpha.$$

On doit distinguer deux cas : ou bien M est sur la diagonale (cas M_1), ou bien M n'est pas sur la diagonale (cas M_2).



▷ Si $x = y$, alors

$$\left|F(x,y) - F(x_0,x_0)\right| = \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

par (2), car $|x - x_0| \leqslant \alpha$.

▷ Si $x \neq y$, alors (Thm des accroissements finis) il existe

$$c \in [x \leftrightarrow y] \subset [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$$

tel que $F(x,y) = f'(c)$ et par conséquent, à nouveau par (2),

$$\left|F(x,y) - F(x_0,x_0)\right| = \left|f'(x) - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

car $|c - x_0| \leqslant \alpha$.

▷ *Dans les deux cas,* on a bien

$$\left|F(x,y) - F(x_0,y_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

▷ On a donc démontré qu'il existait un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, M \in \mathbb{R}^2, \quad \|\mathbf{M_0M}\|_\infty \leqslant \alpha \implies \left|F(M) - F(M_0)\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que F est continue au point $M_0 = (x_0, y_0)$, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et donc que F est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

► **Variante savante**

▷ Pour $x = y$,

$$\int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt = \int_0^1 f'(x)\,dt = f'(x).$$

Pour $x \neq y$, on effectue le changement de variable affine

$$u = x + t(y-x) = (1-t)x + ty$$

et on trouve

$$\int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt = \frac{1}{y-x}\int_x^y f'(u)\,du = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Donc, quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \int_0^1 f'\big(x + t(y-x)\big)\,dt.$$

Évidemment, c'est un début assez siouxx ! L'avantage est de disposer maintenant d'une expression unique *pour* F.

▷ Il nous reste à vérifier les hypothèses du théorème de continuité des intégrales fonctions d'un paramètre.

❧ Quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction

$$[t \mapsto f'(x + t(y-x))]$$

est continue sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.

❧ Quel que soit $t \in [0,1]$, la fonction

$$[(x,y) \mapsto f'(x + t(y-x))]$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$, comme composée de fonctions continues.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{lin.}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathscr{C}^0} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x + t(y-x) & \longmapsto & f'(x + t(y-x)) \end{array}$$

❧ Restreinte à un segment $[-a,a]$, la fonction f' est bornée (puisqu'elle est continue), donc il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall\, t \in [0,1],\ \forall\, (x,y) \in [-a,a] \times [-a,a], \qquad \Big|f'\big(\underbrace{x + t(y-x)}_{\in[-a,a]}\big)\Big| \leqslant A.$$

❧ D'après le Théorème de convergence dominée (version "convergence bornée"), la fonction

$$F = \left[(x, y) \mapsto \int_0^1 f'\big(x + t(y - x)\big)\, dt\right]$$

est continue sur tout compact de la forme $[-a, a] \times [-a, a]$.

▷ Comme la continuité est une propriété locale, la fonction F est continue sur

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a>0} [-a, a] \times [-a, a].$$