EVN de dimension finie [14]

[14.1] Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace de dimension finie, toutes les normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes et en particulier la norme N est équivalente à la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Il existe donc deux réels $0 < a < b$ tels que

$$\forall\, A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad a\|A\|_\infty \leqslant N(A) \leqslant b\|A\|_\infty.$$

Il suffit donc de trouver une matrice diagonalisable T telle que

$$\|T - T_0\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{b}$$

pour conclure.

► On sait qu'une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui possède n valeurs propres distinctes est diagonalisable et que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

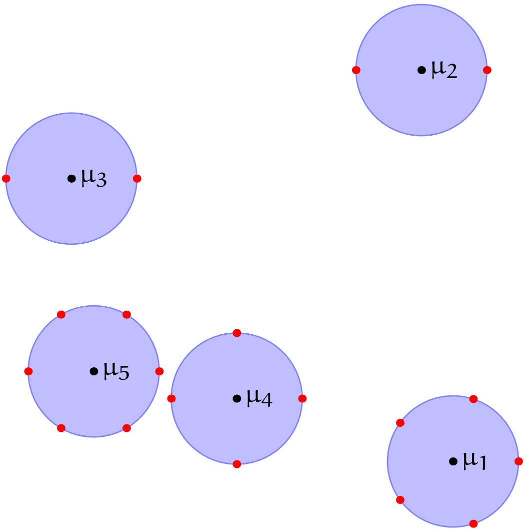
L'idée consiste donc à *perturber* les coefficients diagonaux de T_0 (= leur ajouter de petites quantités), et *seulement* les coefficients diagonaux de T_0, pour obtenir une matrice T triangulaire dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts.

$$T_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} \mu_1 + \alpha_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n + \alpha_n \end{pmatrix}$$

Avec les notations ci-dessus,

$$\|T - T_0\|_\infty = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|\}.$$

► Il y a une manière simple d'obtenir une matrice T comme on la souhaite :
- on entoure chaque valeur propre d'un cercle de rayon assez petit pour que les différents cercles soient deux à deux distincts ;
- on place sur le cercle des complexes régulièrement espacés (à la manière des racines de l'unité) selon la multiplicité de chaque valeur propre.



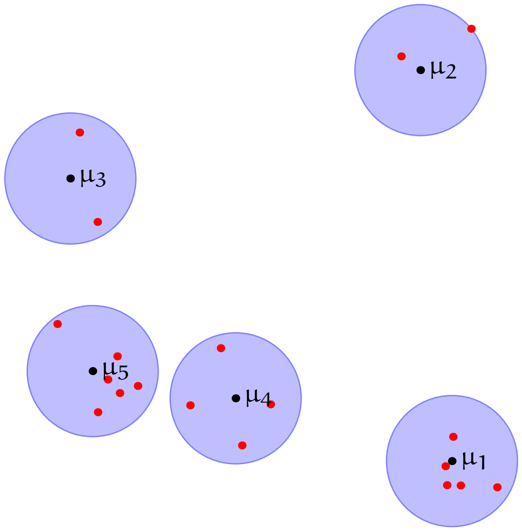
Sur cet exemple, les multiplicités respectives sont

$$m_1 = 5, \quad m_2 = m_3 = 2, \quad m_4 = 4, \quad m_5 = 6$$

donc $T_0 \in \mathfrak{M}_{19}(\mathbb{C})$ (la taille de la matrice est la somme des multiplicités).

▶ On peut obtenir un résultat analogue de manière plus rock'n'roll : si μ_k est une valeur propre de multiplicité m_k, on peut choisir m_k points au hasard dans le disque centré en μ_k. Statisquement, on est presque sûr d'obtenir des valeurs propres deux à deux distinctes.

▶ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les valeurs propres sont sur la droite réelle et il suffit alors de remplacer les disques par des segments. Il n'est pas compliqué de placer m_k points deux à deux distincts sur un segment donné, qu'ils soient placés aléatoirement ou régulièrement, quelle que soit la multiplicité m_k. Donc : ça marche aussi.



[14.2] Quelle que soit la matrice inversible P, l'application

$$\left[M \mapsto P^{-1}MP\right]$$

est linéaire et donc continue (puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace de dimension finie).

Idem pour $\left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ pour les mêmes raisons !

[14.3] On choisit une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs et de limite nulle. Pour chaque indice $n \in \mathbb{N}$, on choisit une matrice diagonalisable T_n telle que $N(T - T_n) \leqslant \varepsilon_n$ (y en a aussi).

Donc toute matrice triangulaire est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

▶ Soit enfin une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Comme il s'agit d'une matrice complexe, elle est semblable à une matrice triangulaire : il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que

$$P^{-1}AP = T.$$

Étant donnée une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables qui converge vers T, on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad A_n = PT_nP^{-1}.$$

▷ Comme les matrices A_n et T_n sont semblables et que les T_n sont diagonalisables, alors les matrices A_n sont diagonalisables.

▷ Comme la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice T et que la fonction $f = \left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ est continue, on déduit du théorème de composition des limites que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(T_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = f(T)$.

▶ Conclusion : toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables, donc les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

REMARQUE.— Ce résultat est faux pour les matrices réelles (parce qu'une matrice réelle n'est pas forcément triangularisable).