EVN de dimension finie [13]

► On suppose que la matrice A possède r valeurs propres deux à deux distinctes :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\mu_1, \dots \mu_r\}.$$

▷ Si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$, alors $A - 0.I_n \in GL_n(\mathbb{K})$: on peut donc choisir $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite (constante !) de matrices inversibles

$$(A - \lambda_k.I_n)_{k\in\mathbb{N}}$$

converge vers A.

▷ Si $0 \in \mathrm{Sp}(A)$, on pose

$$r = \min_{\substack{\mu\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mu\neq 0}} |\mu| > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k = \frac{r}{k+1}.$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k \notin \mathrm{Sp}(A), \quad \text{donc} \quad A - \lambda_k.I_n \in GL_n(\mathbb{K})$$

et comme

$$\big\|A - (A - \lambda_k.I_n)\big\| = |\lambda_k|\,\|I_n\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

la suite de matrices inversibles

$$(A - \lambda_k.I_n)_{k\in\mathbb{N}}$$

converge vers A.

► On a ainsi démontré que $GL_n(\mathbb{K})$ était dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (quelle que soit la norme choisie, bien entendu).