EVN de dimension finie [20]

▶ Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, la sphère unité S^1 de E est compacte (car fermée et bornée **[4]**).

▷ Comme l'application $f : E \to E$ est continue, l'application $\|f\| : E \to \mathbb{R}$ est continue **[Chap.22 - 54]** et atteint un minimum sur le compact S^1 **[Chap.22 - 64]** :

$$\exists\, u_0 \in S^1,\ \forall\, u \in S^1, \quad \big\|f(u)\big\| \geqslant \big\|f(u_0)\big\|.$$

▷ On pose $\alpha = \big\|f(u_0)\big\| \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $x \in E$ *non nul*, par linéarité de f et homogénéité de $\|\cdot\|$,

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\| f\underbrace{\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\in S^1} \right\| \geqslant \alpha.$$

On en déduit que

$$\big\|f(x)\big\| \geqslant \alpha\|x\|,$$

propriété qui est évidemment vraie pour $x = 0_E$ aussi.

▶ Supposons que $\alpha > 0$.

Si $f(x) = 0_E$, alors

$$0 = \|0_E\| = \big\|f(x)\big\| \geqslant \alpha\|x\| \geqslant 0$$

et comme $\alpha > 0$, alors $\|x\| = 0$ et donc $x = 0_E$. Cela prouve que l'application linéaire f est injective.

▷ Réciproquement, supposons que f soit injective. Comme $f(0_E) = 0_E$ et que la sphère unité S^1 ne contient pas le vecteur nul, l'application f ne s'annule en aucun point de S^1. En particulier, $f(u_0) \neq 0_E$ et donc

$$\alpha = \big\|f(u_0)\big\| > 0.$$

▷ Donc : l'application linéaire f est injective si, et seulement si, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \qquad \big\|f(x)\big\| \geqslant \alpha\|x\|.$$

▶ Dans ce cas, le théorème de comparaison nous dit que : si $\|x\|$ tend vers $+\infty$, alors $\|f(x)\|$ tend aussi vers $+\infty$.

Autrement dit, $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.