EVN de dimension finie [21]

▶ Les deux applications $[P \mapsto P]$ et $[P \mapsto P']$ sont linéaires sur $E = \mathbb{R}_d[X]$, espace vectoriel de dimension finie, donc elles sont continues toutes les deux.

Par conséquent, l'application

$$f = [P \mapsto (P, P')]$$

est continue de E dans $E \times E$ **[Chap.23 - 15.2]**.

REMARQUE.— L'application f est aussi *linéaire* de E dans $E \times E$.

*Complément pour illustrer **[Chap.3 - 59.1]**.*

❧ *Si on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ relative à la base canonique de E, la dérivation D est l'endomorphisme défini par*

$$D(1) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad D(X^k) = k.X^{k-1}$$

donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_d[X]$,

$$\begin{aligned} \|D(P)\|_\infty &= \left\| \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} \right\|_\infty \\ &= \max\{k|a_k|,\ 1 \leqslant k \leqslant d\} \\ &\leqslant d \max\{|a_k|\ 1 \leqslant k \leqslant d\} \\ &\leqslant d\|P\|_\infty \end{aligned}$$

donc $|||D||| \leqslant d$.

❧ *Par ailleurs, $\|D(X^d)\|_\infty = d\|X^d\|_\infty$, donc en fait*

$$|||D||| = d.$$

REMARQUE.— *Comme E est un espace de dimension finie, sa sphère unité S^1 est compacte **[4]** et D, en tant qu'application linéaire continue sur E atteint un maximum sur S^1 **[Chap.24 - 25]**. On déduit alors de **[Chap.3 - 59.1]** qu'il existe nécessairement un polynôme $P_0 \in E$ tel que*

$$\|P_0\|_\infty = 1 \quad \textit{et} \quad \|D(P_0)\|_\infty = |||D|||.$$

Ici, il a été facile de trouver que $P_0 = X^d$ convenait — ce n'est pas toujours le cas !

▶ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|X^2 - P_n\| = \|-2^{-n}X\| = 2^{-n}\|X\|$$

donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers X^2.

▶ Comme P_n est scindé à racines simples,

$$f(P_n) = P_n \wedge P_n' = 1$$

cependant que

$$f(X^2) = X^2 \wedge (2X) = X.$$

▶ On a donc trouvé une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = X^2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(P_n) = 1 \neq f(X^2),$$

ce qui prouve que l'application f *n'est pas* continue (Théorème de composition des limites).